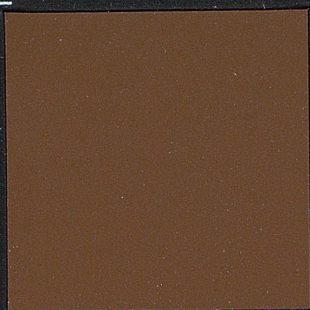
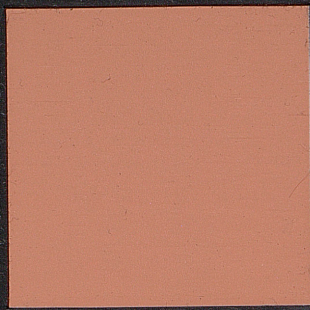
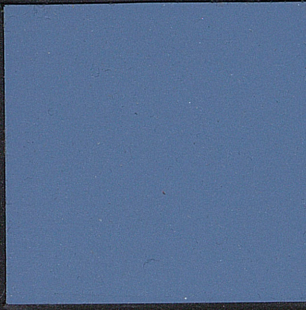
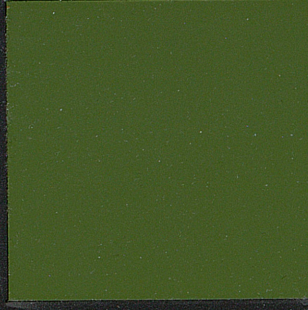
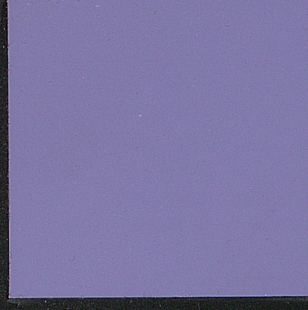
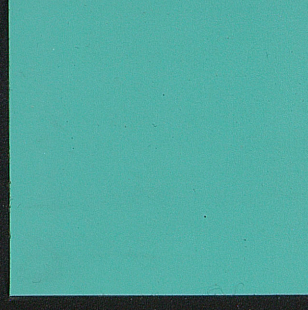
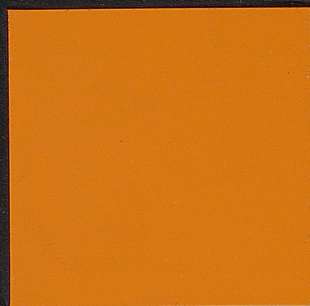
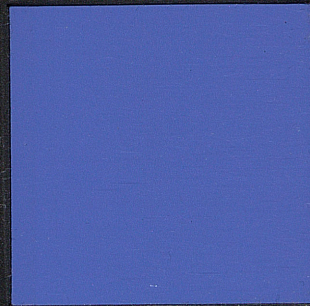
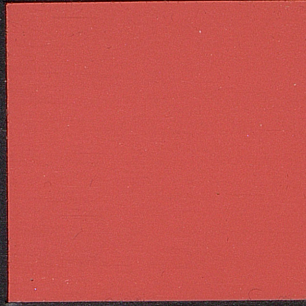
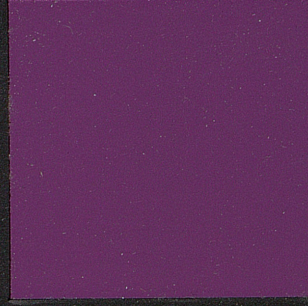
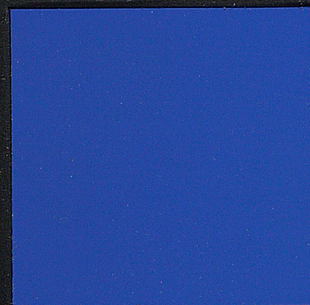
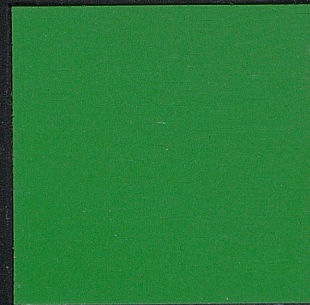
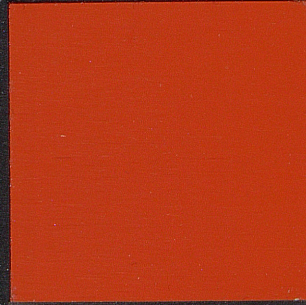
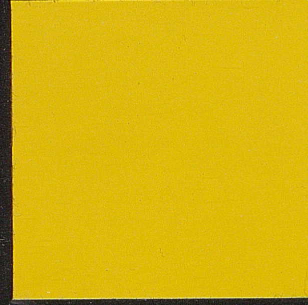
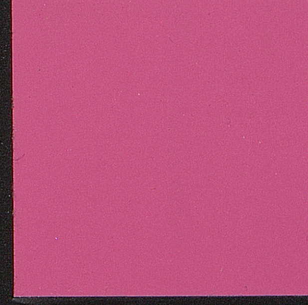
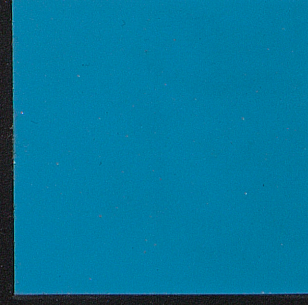
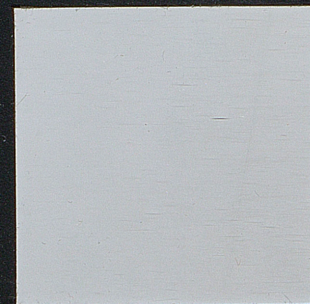
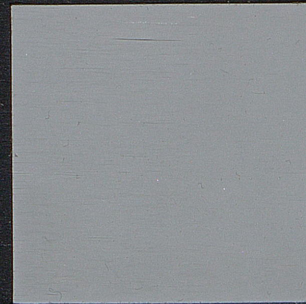
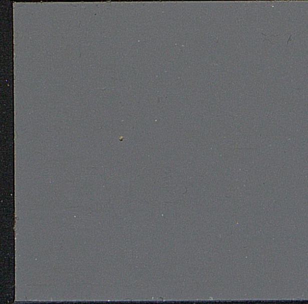
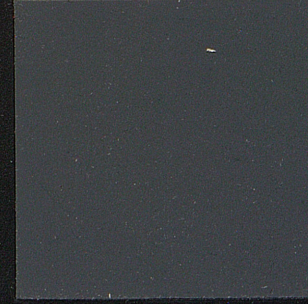
colorchecker CLASSIC


x-rite

mm

Mécanique rationnelle

Cours de M. Appell
à la Faculté des Sciences
1891 – 1892.

3e cahier. Louis Couturat

Papeterie Générale des Écoles, 80, Boul. St-Germain.

Cours de Mécanique rationnelle
professé par M. Appell
à la Faculté des sciences
1891 – 1892.

III.



Table

Dynamique du point m: Equations canoniques.

Nous avons mis les équations du mouvement sous la forme canonique de Hamilton (dans le cas d'une fonction des forces):

(1) $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$ $\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}$ $\frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3}$

(2) $\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$ $\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$ $\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3}$

En résolvant ce système de 6 équations différentielles du 1er ordre on obtiendrait les expressions finies de: $q_1\ q_2\ q_3\ p_1\ p_2\ p_3$ en fonction de t et de 6 constantes: $\alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'$.

Théorème de Jacobi. L'intégration des équations de Hamilton se ramène à la recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles:

(3) $$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1\, q_2\, q_3,\ \frac{\partial V}{\partial q_1}\ \frac{\partial V}{\partial q_2}\ \frac{\partial V}{\partial q_3}\ t\right) = 0$$

où l'on a remplacé $p_1\ p_2\ p_3$ dans H par les dérivées $\frac{\partial V}{\partial q_1}\ \frac{\partial V}{\partial q_2}\ \frac{\partial V}{\partial q_3}$, et où $q_1\ q_2\ q_3\ t$ sont les variables indépendantes.

Cette équation définit une fonction V de $q_1\ q_2\ q_3\ t$. Une intégrale complète de cette équation est une solution qui contient autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes; de sorte qu'en éliminant ces constantes, on retrouve l'équation aux dérivées partielles. — Dans le cas présent, on doit avoir 4 constantes arbitraires; mais comme V ne figure pas dans l'équation,

Mais V n'est déterminé qu'à une constante près, desorte que $(V + C^{te})$ vérifierait aussi l'équation. Il suffit donc, pour avoir une intégrale complète, de trouver une solution quelconque avec 3 constantes non additives, par exemple une fonction: $V(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ à laquelle il suffira d'ajouter une constante arbitraire pour avoir l'intégrale complète. — Nous ne nous occuperons que des 3 constantes non additives: $\alpha\beta\gamma$. — Une fois connue la fonction V, on posera:

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha' \qquad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta' \qquad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \gamma' \qquad (\alpha'\beta'\gamma' \text{ constantes})$$

$$(5) \qquad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} \qquad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} \qquad p_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3}$$

Ces 6 équations définissent en termes finis les 6 inconnues $q_1 q_2 q_3$ $p_1 p_2 p_3$. En effet, les équations (4) contiennent $q_1 q_2 q_3$ et t: on pourra donc, en les résolvant, en tirer $q_1 q_2 q_3$ en fonction de t et des 6 constantes $\alpha\beta\gamma$ (qui figurent dans V) $\alpha'\beta'\gamma'$ (qui forment les seconds membres.) — On portera ces valeurs de $q_1 q_2 q_3$ dans les équations (5) et on en tirera immédiatement $p_1 p_2 p_3$ en fonction de t et des 6 mêmes constantes. — Il s'agit de prouver que ces expressions de $q_1 q_2 q_3$, $p_1 p_2 p_3$ sont les intégrales générales des équations canoniques (1) et (2), c.à d. qu'elles vérifient identiquement ces 6 équations quelles que soient les 6 constantes arbitraires.

Et d'abord, il faut montrer que les valeurs de $q_1 q_2 q_3$, tirées des équations (4) satisfont les équations (1). Pour avoir les dérivées $\frac{dq_1}{dt}$ $\frac{dq_2}{dt}$ $\frac{dq_3}{dt}$, il n'est pas besoin de résoudre les équations (4); il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites.

Si on suppose qu'on les résolve et qu'on y reporte les valeurs obtenues pour $q_1 q_2 q_3$, elles deviendront des identités, et leurs dérivées par rapport à t seront identiquement nulles ; on a donc identiquement :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\beta\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\beta\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\beta\,\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\beta\,\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\gamma\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\gamma\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\gamma\,\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\gamma\,\partial t} = 0$$

Ces 3 équations du 1er degré donneront $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, $\frac{dq_3}{dt}$; on pourrait en effet démontrer que leur déterminant n'est pas nul. Elles n'admettent donc qu'une solution, c.à.d. qu'un système de valeurs pour ces 3 dérivées ; il faut prouver que ces 3 dérivées sont respectivement égales à $\frac{\partial H}{\partial p_1}$, $\frac{\partial H}{\partial p_2}$, $\frac{\partial H}{\partial p_3}$. Pour cela, il suffit de vérifier que ces 3 dernières quantités satisfont identiquement aux équations précédentes. Substituons-les dans la 1re :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial t} = 0$$

Cette équation doit devenir une identité quand on y remplace $q_1 q_2 q_3$, $p_1 p_2 p_3$ par leurs valeurs tirées des équations (4) et (5). Or ~~elle~~ le 1er membre devient identiquement nul dès qu'on y remplace seulement $p_1 p_2 p_3$ par $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ $\frac{\partial V}{\partial q_2}$ $\frac{\partial V}{\partial q_3}$ (en vertu des équations (5))

En effet, puisque, par hypothèse, la fonction : $V(q_1 q_2 q_3\, t, \alpha\beta\gamma)$ est une solution de l'équation de Jacobi (3), celle-ci devient une identité

quand on y substitue cette fonction. Le 1er membre devient ainsi une fonction de $q_1 q_2 q_3 t \alpha \beta \gamma$, et d'autre part il devient identiquement nul; donc toutes ses dérivées partielles doivent être nulles identiquement, par exemple sa dérivée par rapport à α.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial q_1}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial q_2}+\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial q_3}=0$$

en remplaçant $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ $\frac{\partial V}{\partial q_2}$ $\frac{\partial V}{\partial q_3}$ par $p_1 p_2 p_3$; on retrouve ainsi l'identité qu'il s'agissait d'établir. On procéderait de même pour les 2 autres, et on prouverait ainsi que les 3 équations (4) sont des intégrales des équations (1.)

On démontre de même que les valeurs de $p_1 p_2 p_3$ tirées des équations (5) satisfont les équations (2). Vérifions par exemple la 1e:

$$\frac{dp_1}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_1}=0 \qquad \text{Calculons } \frac{dp_1}{dt}. \qquad p_1=\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

d'après les équations (5) ~~que nous venons~~ voulons ~~de vérifier~~; donc p_1 est fonction du temps directement, et aussi par l'intermédiaire de $q_1 q_2 q_3$; on a donc en différentiant:

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial t}$$

Or, en vertu des équations (1) que nous venons de vérifier:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2} \qquad \frac{dq_3}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_3}$$

Il reste donc à prouver qu'on a identiquement:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_1}=0$$

quand on remplace $p_1 p_2 p_3$ par $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ $\frac{\partial V}{\partial q_2}$ $\frac{\partial V}{\partial q_3}$ (équations (5))

Pour cela, considérons encore l'équation de Jacobi (3) où l'on a substitué la fonction V qui vérifie cette équation : elle devient une identité, et ses dérivées partielles sont nulles, par exemple sa dérivée par rapport à q_1 :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3} = 0$$

où l'on a remplacé $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ $\frac{\partial V}{\partial q_2}$ $\frac{\partial V}{\partial q_3}$ par $p_1\, p_2\, p_3$; c'est l'identité qu'il s'agissait de démontrer. Il est donc établi que les équations (5) sont les intégrales des équations (2), et finalement que le système des équations (4) et (5) constitue les intégrales générales du système des équations canoniques (1) et (2) ; les équations (4) et (5) sont donc les équations finies du mouvement.

On a ainsi transformé un système de 6 équations différentielles du 1er ordre en une équation aux dérivées partielles. Au point de vue théorique les 2 problèmes sont équivalents : car si l'on appliquait la méthode générale à l'équation de Jacobi, on serait ramené, pour trouver les caractéristiques, à écrire 6 équations différentielles du 1er ordre c.à.d. à résoudre précisément les 6 équations canoniques. Mais dans la pratique, il peut arriver que le 2e problème soit plus aisé à résoudre que le 1er et qu'on trouve immédiatement une solution de l'équation de Jacobi.

— Appliquons le théorème de Jacobi au cas le plus simple, celui des coordonnées rectangulaires dans l'espace. Nous supposerons encore la masse du point égale à 1, ce qui revient à prendre pour fonction de force $\underline{mU}$ au lieu de $\underline{U}$, et à supprimer ensuite partout le facteur $\underline{m}$. Les coordonnées $q_1\, q_2\, q_3$ sont ici $x\, y\, z$:

$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ $\qquad H = K - U = T - U$

$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1} = x' \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2} = y' \qquad p_3 = \frac{\partial T}{\partial q_3} = z'$

Exprimons H en fonction de $q_1 q_2 q_3 \; p_1 p_2 p_3$:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - U(x, y, z)$$

L'équation de Jacobi est :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] - U(x, y, z) = 0$$

Elle définit la fonction $V(x\,y\,z\,t)$ — On peut simplifier le calcul, car t ne figure pas explicitement dans l'équation. — Posons :

$V = -ht + \Theta(x, y, z)$ et substituons cette forme de solution dans l'équation de Jacobi :

$$-h + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2\right] - U(x\,y\,z) = 0$$

Cette équation définit maintenant la fonction $\Theta(x, y, z)$ — Une intégrale complète de cette équation devra contenir 3 constantes arbitraires ; mais comme Θ n'y figure que par ses dérivées, une de ces constantes peut être additive ; il suffit de trouver une solution contenant 2 constantes non additives ; l'équation peut d'ailleurs s'écrire :

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 = 2(U + h)$$

La fonction Θ contiendra donc nécessairement h ; elle sera de la forme $\Theta(x\,y\,z\,\alpha\,\beta\,h)$ et on aura : $V = -ht + \Theta(x\,y\,z\,\alpha\,\beta\,h)$ solution contenant 3 constantes arbitraires non additives.

Les équations (4) seront alors, une fois Θ et V connus :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \alpha' \qquad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \beta' \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = -t + \frac{\partial \Theta}{\partial h} = h'$$

Ces 3 équations sont les intégrales générales des équations canoniques, c.à.d. les équations finies du mouvement. Les 2 premières ne contiennent pas t : elles définissent donc la trajectoire par 2 relations entre x, y, z. La 3e donnera le temps pour chaque point de la trajectoire. Pour avoir x, y, z exprimés en fonction de t, il faudra les résoudre toutes trois par rapport à $x\ y\ z$.

On a été conduit à poser : $x' = \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ $y' = \frac{\partial \Theta}{\partial y}$ $z' = \frac{\partial \Theta}{\partial z}$

On peut donc dire que Θ est une fonction des vitesses, comme V est une fonction des forces (ou des accélérations, le facteur m ayant disparu.) — La constante h est la constante des forces vives, car on a :

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = V + h.$$

Conséquence : La vitesse du mobile est toujours normale aux surfaces : $\Theta =$ constante, ($\alpha\ \beta\ h$ étant constantes pour un même mouvement) car les paramètres directeurs de la normale sont :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

La trajectoire elle-même est par suite orthogonale à la famille de surfaces : $\Theta =$ Const. ; et puisqu'elle est définie par les 2 équations :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \alpha' \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \beta'$$

où α', β' sont des constantes, on obtiendra les trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces en faisant varier α', β'. — On pourrait prouver que les surfaces : $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} =$ Const. : $\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} =$ Const. sont normales aux surfaces : $\Theta =$ Const.

— En coordonnées rectangulaires dans le plan, l'équation de Jacobi

s'écrit : $$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right]=U(x,y)+h.$$

On devra chercher une intégrale complète avec 1 constante non additive : soit la solution : $\Theta(x, y, \alpha, h)$. Les équations du mouvement seront : $$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\alpha' \qquad -t+\frac{\partial\Theta}{\partial h}=h'$$

La 1e définit la trajectoire, la 2e donne le temps. Dans le plan des xy, la trajectoire sera orthogonale à la famille de courbes : $\Theta = C^{te}$ et on aura toutes les trajectoires orthogonales de cette famille en faisant varier α'.

Exemple : Mouvement d'un point pesant dans le vide.

Le mouvement s'effectue dans le plan vertical Oxy. La fonction des forces est : $U=-gy$. L'équation de Jacobi s'écrit :
$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right]=h-gy$$
La variable x n'y figure pas ; posons donc : $\Theta=\alpha x+\varphi(y)$ et substituons :
$$\frac{1}{2}\left[\alpha^2+\varphi'(y)^2\right]=h-gy \qquad \varphi(y)=\int\sqrt{2h-2gy-\alpha^2}\,dy$$
Ayant $\varphi(y)$ par une quadrature : $\varphi(y)=\frac{-1}{3g}\left(2h-2gy-\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}$

on aura la fonction : $\Theta=\alpha x+\varphi(y)$

avec 2 constantes α et h ; la 3e constante, additive, s'introduit dans $\varphi(y)$ par la quadrature. L'équation : $\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\alpha'$ devient :
$$x-\alpha\int\frac{dy}{\sqrt{2h-2gy-\alpha^2}}=\alpha'$$
C'est l'équation d'une trajectoire parabolique : car on a, en intégrant :
$$x-\alpha'=\frac{\alpha}{g}\sqrt{2h-2gy-\alpha^2} \qquad (x-\alpha')^2=\frac{\alpha^2}{g^2}\left(2h-2gy-\alpha^2\right)$$

La 2e équation : $\frac{\partial \Theta}{\partial h} - t = h'$ devient :

$\int \frac{dy}{\sqrt{2h - 2gy - \alpha^2}} = t + h'$ $t + h' = \frac{1}{g}\sqrt{2h - 2gy - \alpha^2}$

Cette équation donne le temps. — On peut éliminer l'intégrale entre les 2 équations ; on trouve : $x - \alpha' = \alpha(t + h')$

équation d'un mouvement uniforme suivant l'axe horizontal Ox : la constante α est la vitesse de ce mouvement, c.à.d. la projection horizontale de la vitesse initiale : $\alpha = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$

Les équations : $\Theta = C^{te}$ $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = C^{te}$

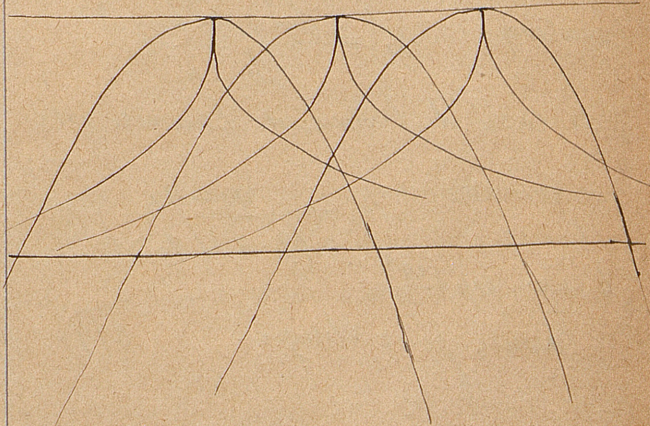
définissent 2 familles de courbes orthogonales. — La 2e donne les trajectoires du point mobile, c.à.d. des paraboles représentées par l'équation : $x - \frac{\alpha}{g}\sqrt{2h - 2gy - \alpha^2} = \alpha'$.

Faire varier α', c'est ajouter ou retrancher une constante à x ; c'est donc déplacer la même parabole parallèlement à Ox. Cette parabole, d'axe vertical, a pour sommet le point : $y = \frac{2h - \alpha^2}{2g}$ $x = \alpha'$ qui annule le radical. Toutes ces paraboles ont donc pour enveloppe la droite : $y = \frac{2h - \alpha^2}{2g}$.

Les courbes : $\Theta = C^{te}$ sont définies par l'équation :

$\alpha x - \frac{1}{3g}(2h - 2gy - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} = \alpha C$

Faire varier C, c'est ajouter à x une constante, c'est donc déplacer



cette courbe parallèlement à Ox. Elle a ~~aussi~~ pour sommet le point :
$y = \frac{2h - \alpha^2}{2g}$ $x = C$ Pour la construire, on peut
transporter l'origine en ce point, qui est un point de rebroussement.
Son équation devient alors : $x_1 = k(-y_1)^{\frac{3}{2}}$
C'est une parabole semi-cubique, qui coupe orthogonalement toutes les paraboles de l'autre famille, et qui a son sommet sur la même droite où se trouvent les sommets de celles-ci : $y = \frac{2h - \alpha^2}{2g}$.

— Mouvement d'un point matériel attiré par 2 centres fixes suivant la loi de Newton (Euler, Lagrange, Jacobi ; thèses de Serret et Andrade.)

Nous emploierons, avec Jacobi, les coordonnées elliptiques dans le plan ; soient F, F' les 2 foyers sur l'axe des x à égale distance de O ; l'équation des coniques homofocales est :

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y_1^2}{b-\lambda} - 1 = 0 \qquad \text{où : } a > b$$

A chaque point M du plan correspondent 2 valeurs de λ, l'une $q_1 < b$ qui donne une ellipse, l'autre : $b < q_2 < a$ qui donne une hyperbole. On a d'ailleurs les formules de transformation : $y_1^2 = \frac{(b-q_1)(b-q_2)}{b-a}$ $x^2 = \frac{(a-q_1)(a-q_2)}{a-b}$

Le carré de l'élément linéaire est : $ds_1^2 = \frac{1}{4}\left[N_1 dq_1^2 + N_2 dq_2^2\right]$

en posant : $N_1 = \frac{q_2 - q_1}{(q_1-a)(q_1-b)}$ $N_2 = \frac{q_1 - q_2}{(q_2-a)(q_2-b)}$

(2e cahier, page 138.)

Posons, pour abréger : $\varphi(q) = (q-a)(q-b)$

Cherchons l'expression en coordonnées elliptiques des 2 rayons vecteurs du p.t M : $FM = r$, $F'M = r'$.

L'ellipse qui passe par M a pour équation :

$$\frac{x^2}{a-q_1} + \frac{y_0^2}{b-q_1} - 1 = 0$$ et pour grand axe : $2\sqrt{a-q_1}$

Donc : $$r' + r = 2\sqrt{a-q_1}$$

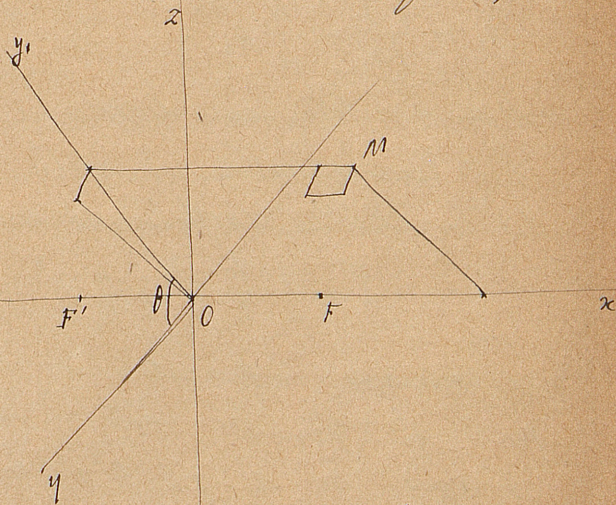
L'hyperbole qui passe par M a pour équation :

$$\frac{x^2}{a-q_2} + \frac{y_0^2}{b-q_2} - 1 = 0$$ et pour axe transverse : $2\sqrt{a-q_2}$

Donc : $$r' - r = 2\sqrt{a-q_2}$$ en supposant $r' > r$.

D'où : $r' = \sqrt{a-q_1} + \sqrt{a-q_2}$ $\qquad r = \sqrt{a-q_1} - \sqrt{a-q_2}$

Soient maintenant dans l'espace les 2 centres attractifs F, F' sur Ox à égale distance de O.



Déterminons d'abord le plan du p.t M et de l'axe des x ; il a pour trace Oy_1 sur le plan yOz ; soit :

$$y_1\hat{O}y = \theta$$

cet angle fixe la position de ce plan. Dans ce plan, nous définirons la position du p.t M par les coordonnées elliptiques $q_1 q_2$.

Calculons l'élément linéaire dans l'espace ; pour cela, imprimons au p.t M un déplacement arbitraire. Il suffit de le déplacer d'abord dans le plan y_1Ox, puis normalement à ce plan ; car un déplacement

quelconque équivalent à ces 2 déplacements : MM_1 dans le plan y_1Ox, M_1M' par une rotation de ce plan autour de Ox :

$ds^2 = ds_1^2 + ds'^2$ Or : $ds_1^2 = \frac{1}{4}\left[N_1 dq_1^2 + N_2 dq_2^2\right]$ $ds'^2 = y_1^2 d\theta^2$

Donc : $ds^2 = \frac{1}{4}\left[N_1 dq_1^2 + N_2 dq_2^2\right] + y_1^2 d\theta^2$

$dq_1, dq_2, d\theta$ n'entrent dans cette expression qu'en carrés, parce que les 3 surfaces : $q_1 = C^{te}$ $q_2 = C^{te}$ $\theta = C^{te}$ sont orthogonales. Les surfaces des 2 premières familles sont des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à 2 nappes de révolution ; celles de la 3e sont les plans qui passent par l'axe des x. — θ est la 3e coordonnée q_3. On aura

$$T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{N_1}{4} q_1'^2 + \frac{N_2}{4} q_2'^2 + y_1^2 \theta'^2\right]$$

Les variables auxiliaires $p_1\, p_2\, p_3$ sont alors :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \frac{N_1}{4} q_1' \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \frac{N_2}{4} q_2' \; ; \; p_3 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = y_1^2 \theta'$$

d'où l'on tire immédiatement les expressions de $q_1'\; q_2'\; q_3'$.

Cette transformation est usitée dans la théorie des coniques, pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées tangentielles.

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{N_1} p_1^2 + \frac{4}{N_2} p_2^2 + \frac{p_3^2}{y_1^2}\right]$$

Les nouveaux coefficients sont les inverses des anciens : cela tient à ce que q_1', q_2', θ' sont au carré dans T. On aura, T étant homogène en $q_1'\, q_2'\, \theta'$:

$$H = T - U$$

Calculons la fonction des forces : le point M est soumis aux 2 attractions : (en faisant sa masse égale à l'unité)

$$-\frac{\mu}{r^2} \quad \text{et} \quad -\frac{\mu'}{r'^2}$$

Dans un déplacement quelconque, la somme des travaux élémentaires

de ces 2 forces centrales est : $-\left(\frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu'}{r'^2}\right) dr$

Donc : $V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} = \frac{\mu r' + \mu' r}{r r'}$

Exprimons V en fonction de $q_1 q_2$: $V = \frac{U_2 - U_1}{q_2 - q_1}$

Nous désignons par U_1 une fonction de q_1 seul, par U_2 une fonction de q_2 seul : ce sont d'ailleurs :

$$U_1 = -(\mu + \mu')\sqrt{a - q_1} \qquad U_2 = (\mu - \mu')\sqrt{a - q_2}$$

Mais nous n'avons pas besoin de ces expressions, et les calculs que nous allons faire s'appliquent toutes les fois que l'on a 2 fonctions $U_1\ U_2$ dont chacune ne dépend que d'une variable q_1, q_2.

Rappelons que : $N_1 = \frac{q_2 - q_1}{\varphi(q_1)}$ $N_2 = \frac{q_1 - q_2}{\varphi(q_2)}$

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{4\varphi(q_1)}{q_2 - q_1} p_1^2 + \frac{4\varphi(q_2)}{q_1 - q_2} p_2^2 + \frac{b-a}{(b-q_1)(b-q_2)} p_3^2\right] - \frac{U_2 - U_1}{q_2 - q_1}$$

On pourrait maintenant écrire les équations canoniques ; mais nous emploierons le théorème de Jacobi pour trouver les intégrales. Prenons $(q_2 - q_1)$ pour dénominateur commun dans H :

$$\frac{1}{(b-q_1)(b-q_2)} = \frac{\frac{1}{b-q_2} - \frac{1}{b-q_1}}{q_2 - q_1}$$ Écrivons l'équation de Jacobi :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{4\varphi(q_1)}{q_2 - q_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{4\varphi(q_2)}{q_2 - q_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{\frac{b-a}{b-q_2} - \frac{b-a}{b-q_1}}{q_2 - q_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{U_2 - U_1}{q_2 - q_1} = 0$$

On doit en tirer la fonction $V(q_1 q_2 \theta\, t)$ avec 3 constantes non additives. Comme ni θ ni t ne figurent dans l'équation de Jacobi, on posera : $V = -ht + \alpha\theta + V_1(q_1) + V_2(q_2)$

h, α constantes.

On suppose que V peut se dédoubler (comme U) en 2 fonctions dont chacune ne dépende que d'une des 2 variables $q_1 q_2$. On va le vérifier. Substituons cette forme de V en chassant les dénominateurs :

$$-2h(q_2-q_1)+4\varphi(q_1)V_1'^2-4\varphi(q_2)V_2'^2+\alpha^2\left(\frac{b-a}{b-q_2}-\frac{b-a}{b-q_1}\right)-2U_2+2U_1=0$$

Cette équation se partage en 2 parties dont l'une contient q_1, l'autre q_2 :

$$2hq_1+4\varphi(q_1)V_1'^2-\frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2+2U_1=2hq_2+4\varphi(q_2)V_2'^2-\frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2+2U_2$$

Pour qu'il y ait une solution de cette équation différentielle, il faut que les 2 membres soient constants, puisqu'ils dépendent respectivement de 2 variables indépendantes. Égalons donc chacun d'eux à une constante commune 2β : on en tirera :

$$V_1'^2=\frac{2\beta-2hq_1+\frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2-2U_1}{4\varphi(q_1)}$$ d'où :

$$V_1=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{2\beta-2hq_1+\frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2-2U_1}{\varphi(q_1)}}\,dq_1$$ et de même

$$V_2=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{2\beta-2hq_2+\frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2-2U_2}{\varphi(q_2)}}\,dq_2$$

On voit que $V_1\ V_2$ ne dépendent chacun que d'une des variables $q_1 q_2$. En calculant $V_1\ V_2$ par ces quadratures, on aura l'intégrale complète :

$$V=-ht+\alpha\theta+V_1(q_1)+V_2(q_2)$$

avec les 3 constantes h, α, β, et 1 constante additive provenant des quadratures. On pourra alors écrire les 3 équations du mouvement :

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}=\alpha' \qquad \frac{\partial V}{\partial\beta}=\beta' \qquad \frac{\partial V}{\partial h}=h'$$

qui définissent $q_1 q_2 \theta$ en fonction du temps, c.à.d. déterminent les positions successives du point mobile M dans l'espace.

Ces équations seront explicitement :

$$\alpha' = \theta + \frac{\alpha(b-a)}{2}\int \frac{\frac{dq_1}{b-q_1}}{\sqrt{\varphi(q_1)\left(2\beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2 - 2V_1\right)}} + \frac{\alpha(b-a)}{2}\int \frac{\frac{dq_2}{b-q_2}}{\sqrt{\varphi(q_2)\left(2\beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2 - 2V_2\right)}}$$

$$\beta' = \int \frac{dq_1}{\sqrt{\varphi(q_1)\left(2\beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2 - 2V_1\right)}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{\varphi(q_2)\left(2\beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2 - 2V_2\right)}}$$

$$h' = -t - \frac{1}{2}\int \frac{q_1\,dq_1}{\sqrt{\varphi(q_1)\left(2\beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2 - 2V_1\right)}} - \frac{1}{2}\int \frac{q_2\,dq_2}{\sqrt{\varphi(q_2)\left(2\beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2 - 2V_2\right)}}$$

La 2e de ces équations ne contient que $q_1 q_2$: elle définira donc la trajectoire relative du mobile dans le plan tournant $y_1 O x$. La 1e donnera θ en fonction de $q_1 q_2$, c.à.d. la rotation du plan autour de Ox. La 3e donnera le temps en fonction de $q_1 q_2$, c.à.d. le mouvement sur la trajectoire relative dans le plan mobile $y_1 O x$: le mouvement absolu sera ainsi complètement déterminé.

Remarquons que $V_1 V_2$ sont irrationnelles : $\sqrt{a-q_1}$ $\sqrt{a-q_2}$ mais on fera disparaître cette irrationnalité en posant :

$$a - q_1 = \rho_1^2 \qquad a - q_2 = \rho_2^2$$

les quantités soumises aux radicaux deviendront rationnelles, et on pourra, par des réductions, les ramener au 4e degré ; on aura donc 6 intégrales elliptiques, qu'on pourra convertir, au moyen des fonctions θ, en fonctions elliptiques inverses : sn, cn, dn

Les mêmes calculs, avons-nous dit, s'appliquent à toutes les fonctions $V_1\, V_2$ qui dépendent séparément de $q_1\, q_2$. On pourrait par exemple ajouter aux 2 attractions issues des foyers une attraction issue du centre et proportionnelle à la distance.

On sait que h est en général la constante des ~~aires~~ forces vives. D'autre part, α est la constante des aires; en effet, on a les 3 équations :

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} \qquad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} \qquad p_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3} = \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

qui deviennent :

$$\frac{N_1}{4} q_1' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2 - 2V_1}{\varphi(q_1)}} \qquad \frac{N_2}{4} q_2' = \sqrt{\frac{2\beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2 - 2V_2}{\varphi(q_2)}}$$

$$y_1^2\theta' = \alpha$$

Cette dernière équation, où α est une constante, exprime que la projection du p. M sur le plan Oyz obéit à la loi des aires, car y_1 est le rayon vecteur de cette projection. On pouvait d'ailleurs prévoir ce résultat, car les seules forces auxquelles soit soumis le p. M ont des moments nuls par rapport à l'axe des x ; la loi des aires est donc vraie dans tout plan perpendiculaire à Ox.

— Principe de la moindre action.

Ce principe, entrevu par Euler, formulé par Maupertuis pour la première fois, a été employé par Lagrange et Laplace. Jacobi l'a énoncé et démontré pour le cas d'une fonction de forces.

Considérons un point matériel entièrement libre, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel : $-V(x, y, z)$. Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}$$

en faisant la masse égale à 1 (ou en divisant V par m.)

Nous ne considérerons que les mouvements dans lesquels la constante des forces vives h a la même valeur, ce qui signifie que, pour une même position initiale, la vitesse initiale du point mobile a la même valeur arithmétique, quelle que soit d'ailleurs sa direction, car v_0 est déterminé par la relation: $v_0^2 = 2(V_0 + h)$

Cela posé, proposons-nous la question suivante:

Problème. Étant donnés dans l'espace 2 points A, B, par quelle courbe C faut-il joindre ces 2 points pour que l'intégrale curviligne:

$$J = \int_A^B \sqrt{2(V+h)}\, ds$$

prise suivant cette courbe soit minimum?

La valeur de l'intégrale J prise suivant une courbe quelconque s'appelle (Tait et Thomson) l'action du point mobile sur cette courbe de A en B. On demande donc de trouver la ligne de moindre action de A en B. — Or le minimum de J existe, car le radical est pris positivement et ne s'annule pas. On va prouver que la ligne de moindre action est une des courbes que suivrait le mobile ~~abandonné à lui même et soumis aux~~ sous l'action des forces données, librement ~~càd~~ s'il était lancé du p. A avec la vitesse initiale donnée de manière à atteindre le point B.

Nous avons en effet traité, à l'occasion de l'équilibre des fils (2e cahier, page 7) le problème général relatif au minimum de l'intégrale:

$$\int_A^B \varphi(x, y, z)\, ds$$

prise suivant une certaine courbe joignant A à B. On obtient la courbe qui rend cette intégrale minimum en cherchant la position

d'équilibre d'un fil soumis à des forces dérivant du potentiel φ ; les équations de cette courbe sont :

$$d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0 \qquad d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0 \qquad d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0$$

Faisons donc : $\varphi(x, y, z) = \sqrt{2(V+h)}$ On aura :

$$d\left(\sqrt{2(V+h)}\,\frac{dx}{ds}\right) - \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{2(V+h)}}\, ds = 0$$ et de même les 2 autres.

Ces 3 équations définiront la ligne de moindre action. Introduisons la variable auxiliaire t : $dt = \dfrac{ds}{\sqrt{2(V+h)}}$

Les équations deviennent :

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} dt = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Or ce sont les équations du mouvement d'un point libre soumis à des forces dérivant du potentiel $-V$, et où t est le temps : la ligne de moindre action est ~~la~~ une des trajectoires que doit suivre ce point pour aller de A en B. — L'équation du changement de variable exprime le théorème des forces vives et détermine la constante h :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2(V+h)} \qquad v^2 = 2(V+h)$$

Dans le cas le plus simple, où le point n'est soumis à aucune force $V = 0$: alors le point décrit une droite avec une vitesse constante. En effet, son action est : $\sqrt{2h}\int_A^B ds = \sqrt{2h}\, l$

l, longueur de la ligne AB, est minimum quand c'est la droite AB.

Le principe de la moindre action exprime certaines propriétés géométriques de la trajectoire du mobile libre — On peut appliquer à l'action

tout ce qui a été dit touchant l'intégrale générale $\int_c \varphi \, ds$ — Par exemple, si on lance le point mobile normalement à une surface contenant sa position initiale, on aura une famille de trajectoires; si sur ces trajectoires on prend des longueurs telles que l'action du mobile ait la même valeur sur toutes, les extrémités de ces longueurs formeront une surface qui sera encore normale aux trajectoires; c'est une sorte de parallélisme que l'action établit ainsi entre des surfaces toutes normales aux trajectoires (cf. Traité de géométrie de M. Darboux, 2e volume, fin)

— Principe de Hamilton

Ce principe, comme celui de la moindre action, caractérise la trajectoire d'un point matériel libre par le minimum d'une certaine intégrale définie. Mais il est plus général que le précédent, car il s'applique non seulement au cas d'une fonction de forces $U(x, y, z)$, mais au cas où X, Y, Z sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une fonction $U(x, y, z, t)$.

Supposons toujours le point de masse 1; considérons l'intégrale de Hamilton:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U(x, y, z) \right] dt$$

x, y, z sont des fonctions du paramètre t définissant une courbe; on se donne à l'avance la position du mobile M_0 $(x_0 y_0 z_0)$ à l'instant t_0, et sa position M_1 $(x_1 y_1 z_1)$ à l'instant t_1, de sorte que la courbe, quelle qu'elle soit, passe par les points M_0, M_1. Non seulement la courbe est quelconque entre ces 2 points, mais elle est décrite suivant une loi quelconque entre les instants t_0 et t_1. Cherchons parmi tous les mouvements possibles ainsi définis celui pour lequel l'intégrale

J est minimum. On va démontrer que c'est le mouvement naturel du mobile libre soumis à l'action de la force donnée, qui a pour projections: $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$ $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$

Imaginons que ce minimum de l'intégrale J ait lieu pour certaines fonctions du temps: $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ $z = \varpi(t)$

Cela veut dire que la variation de l'intégrale est nulle quand on fait varier infiniment peu ces fonctions entre t_0 et t_1, par exemple en les remplaçant par:

$$x + \delta x = \varphi(t) + \varepsilon\xi \qquad y + \delta y = \psi(t) + \varepsilon\eta \qquad z + \delta z = \varpi(t) + \varepsilon\zeta$$

ξ, η, ζ étant des fonctions arbitraires du temps qui s'annulent aux limites t_0, t_1. Quand x, y, z augmentent de $\delta x, \delta y, \delta z$, c.à.d. de $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta, \varepsilon\zeta$, leurs dérivées x', y', z' augmentent de:

$$(\delta x)' = \varepsilon\xi' \qquad (\delta y)' = \varepsilon\eta' \qquad (\delta z)' = \varepsilon\zeta'$$

On peut d'ailleurs écrire $\delta x', \delta y', \delta z'$ au lieu de $(\delta x)', (\delta y)', (\delta z)'$.

La variation de l'intégrale J aura donc pour expression:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z' + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z \right) dt$$

Transformons les 3 premiers termes de l'intégrale en les intégrant par parties: $\int x'\delta x' dt = \int x' d(\delta x) = x'\delta x - \int \delta x . x'' dt$

Or, pris aux limites t_0, t_1, les termes: $x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z$ s'annulent, car $\delta x\, \delta y\, \delta z$ sont nulles pour les extrémités t_0, t_1.

On a donc: $\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-x'' + \frac{\partial U}{\partial x}\right)\delta x + \left(-y'' + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\delta y + \left(-z'' + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\delta z \right] dt$

J étant maximum ou minimum δJ est nulle quelles que soient

les accroissements arbitraires $\delta x\ \delta y\ \delta z$ entre t_0, t_1. On a donc séparément, en égalant à 0 leurs coefficients respectifs :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Ce sont précisément les équations du mouvement du point libre. Donc, pour avoir la loi du mouvement qui rend l'intégrale J minimum, on devra lancer le point depuis M_0, à l'époque t_0, avec une vitesse et dans une direction telles qu'il arrive en M_1 à l'époque t_1.

On peut, en partant de ce principe, retrouver très facilement les équations de Lagrange. Pour cela, on pose, comme toujours :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) \qquad \text{d'où :} \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} (T + V)\, dt$$

On vient de voir qu'on obtient les équations du mouvement quand on exprime que l'intégrale J est maximum ou minimum. Cette conclusion est évidemment indépendante du système de coordonnées. Écrivons donc les formules de transformation les plus générales des coordonnées :

$$x = \varphi(q_1 q_2 q_3 t) \qquad y = \psi(q_1 q_2 q_3 t) \qquad z = \varpi(q_1 q_2 q_3 t)$$

Alors V devient fonction de $q_1 q_2 q_3 t$; x', y', z' deviennent fonctions de $q'_1 q'_2 q'_3$, et la ~~intégrale~~ quantité à intégrer $(T + V)$ devient une fonction de $(q_1 q_2 q_3\ q'_1 q'_2 q'_3\ t)$ — Pour $t = t_0$, $x y z$ ont les valeurs données $x_0\ y_0\ z_0$; donc $q_1 q_2 q_3$ auront des valeurs déterminées par les 3 équations précédentes, et fixes ; de même pour $t = t_1$, $q_1 q_2 q_3$ auront des valeurs fixes correspondant aux valeurs données $x_1\ y_1\ z_1$. Les variations des nouvelles coordonnées $q_1 q_2 q_3$ doivent donc s'annuler aux limites t_0, t_1.

La variation de J aura pour expression :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial T}{\partial q_3} \delta q_3 + \frac{\partial T}{\partial q_1'} \delta q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} \delta q_2' + \frac{\partial T}{\partial q_3'} \delta q_3' + \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3} \delta q_3 \right) dt$$

Transformons les termes en $\delta q_1'$, $\delta q_2'$, $\delta q_3'$, en les intégrant par parties :

$$\int \frac{\partial T}{\partial q_1'} \delta q_1' \, dt = \int \frac{\partial T}{\partial q_1'} d(\delta q_1) = \frac{\partial T}{\partial q_1'} \delta q_1 - \int \delta q_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) dt$$

Or, prise de t_0 à t_1, la partie intégrée s'annule, puisque $\delta q_1\ \delta q_2\ \delta q_3$ sont nulles aux limites ; on a donc en définitive

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_1} \right] \delta q_1 + \left[\frac{\partial T}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_2} \right] \delta q_2 + \left[\frac{\partial T}{\partial q_3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_3'}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_3} \right] \delta q_3 \right\} dt$$

On sait que cette variation est nulle dans le mouvement naturel du point mobile ; quels que soient les accroissements arbitraires $\delta q_1\ \delta q_2\ \delta q_3$; on a donc dans ce mouvement les équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_3'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial U}{\partial q_3}$$

Ce sont bien les équations de Lagrange.

On verra plus tard que les 2 principes que nous venons d'établir (celui de Hamilton et celui de la moindre action) s'appliquent au mouvement des systèmes dans les mêmes conditions.

Mouvement d'un point assujetti à des liaisons.

Le cas le plus simple d'une liaison est celui d'un point matériel glissant sans frottement sur une courbe, soit fixe, soit changeant de position et même de forme avec le temps.

Considérons d'abord un point mobile sur une courbe fixe. Il est sollicité par des forces directement appliquées qui ont pour résultante $\vec{F}$ $(X\,Y\,Z)$; il est de plus soumis à la réaction normale de la courbe, N. On obtient immédiatement l'équation du mouvement en appliquant le théorème des forces vives ; pour le déplacement ds (dx, dy, dz) on a :

$$d\,\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

La réaction normale se trouve éliminée parce que son travail est nul. On a ainsi une équation qui définit le mouvement du point sur la courbe fixe, car sa position ne dépend que d'un paramètre. Supposons la courbe exprimée en fonction d'un paramètre q :

$$x = \varphi(q) \qquad y = \psi(q) \qquad z = \varpi(q)$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left[\varphi'(q)^2 + \psi'(q)^2 + \varpi'(q)^2\right]\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

Alors : $$d\,\frac{mv^2}{2} = \left[X\varphi'(q) + Y\psi'(q) + Z\varpi'(q)\right]dq = Q\,dq$$

Dans le cas le plus général, Q sera une fonction de q, de q' et de t. L'équation des forces vives sera une équation différentielle du 2e ordre définissant q en fonction de t, c.à.d. le mouvement sur la courbe. On verra dans la suite que les équations de Lagrange fournissent un moyen d'écrire directement cette équation. Remarquons que Q est la fonction qui s'annule dans les positions d'équilibre, car l'équation : $Q = 0$ exprime que la force donnée F est normale à la courbe (cf. Statique 1er cahier, page 84.)

Si la force donnée ne dépend que de la position du point mobile, Q ne dépendra que de q, et on aura la vitesse par une quadrature :

$\frac{mv^2}{2} = \int Q\,dq$ En remplaçant v^2 par sa valeur en q, on aura : $\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \Phi(q)$ d'où l'on tire, en intégrant :

$dt = \pm \frac{dq}{\sqrt{\Phi(q)}}$ On a le temps par une 2e quadrature.

Ainsi, quand la force ne dépend que de la position, le problème se résout par 2 quadratures.

Pour chasser l'indétermination qui provient du double signe du radical, on prendra au début du mouvement le signe de la vitesse initiale $\left(\frac{dq}{dt}\right)_0$ et on le conservera jusqu'à ce que $\frac{dq}{dt}$ s'annule ou devienne infini. Si $\frac{dq}{dt}$ devient infini, le mouvement est nécessairement arrêté par les conditions physiques, et les formules cessent de le représenter. Si $\frac{dq}{dt}$ devient nul, le mobile se mouvra à partir de cet instant comme s'il était abandonné sans vitesse initiale dans cette position. Comme on connaît la direction de la force, on saura dans quel sens le point se déplace, et on prendra le signe correspondant jusqu'à une nouvelle valeur critique de $\frac{dq}{dt}$.

Dans le cas où il y a une fonction de forces, on peut intégrer immédiatement l'équation du mouvement, on a l'intégrale des forces vives : $\frac{mv^2}{2} = U + h$.

On a ainsi directement la vitesse exprimée en fonction de x, y, z. On achèvera le calcul comme ci-dessus pour trouver l'équation finie du mouvement : on aura t en fonction de q par une quadrature.

— Calcul de la réaction normale — Deux méthodes :

On peut déduire la réaction normale des équations générales du mouvement.
Soient les équations de la courbe: $f(xyz)=0$ $f_1(xyz)=0$
Les projections de la réaction normale N (dont les 2 composantes sont normales aux 2 surfaces $f=0$, $f_1=0$) seront:

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} \qquad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} \qquad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

Les équations du mouvement seront donc:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

En éliminant λ, λ_1 entre ces 3 équations, on retrouverait l'équation unique du mouvement sur la courbe (équation des forces vives)
Donc, une fois le mouvement connu, c. à d. x, y, z exprimés en fonction de t, on tirera λ, λ_1 de 2 quelconques de ces équations.

— Autre méthode, plus commode quand la courbe a une définition géométrique simple: on écrit que la force donnée est le produit de l'accélération par la masse — Projetons la force et l'accélération sur la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe au point M: la même relation subsistera entre leurs projections. Celles de F sont connues: F_t, F_n, F_b. Celles de N sont: 0, N_n, N_b.
Celles de l'accélération sont: $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{\rho}$, 0 (cf. 1er cahier, page 32)
Les équations du mouvement sont donc:

$$m\frac{dv}{dt}=F_t \qquad m\frac{v^2}{\rho}=F_n+N_n \qquad 0=F_b+N_b.$$

La 1e est l'équation du mouvement sur la courbe; les 2 autres donnent



N_n, N_b ; pour cela il faut connaître le rayon de courbure ρ de la courbe donnée en chaque point. v^2 se calculera comme plus haut ; dans le cas d'une fonction des forces on a : $\frac{mv^2}{2} = U + h$

La 1e équation est, dans tous les cas, l'équation des forces vives ; on peut l'écrire : $m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = F_t$ ou : $m v dv = F_t ds$

$d \frac{mv^2}{2} = F_t ds$ Le 2e membre est le travail élémentaire de la force donnée F pour le déplacement $\underline{ds}$.

On peut remarquer que le mouvement du point sur la courbe ne dépend que de la composante tangentielle de la force et de la longueur de l'arc. Donc, si l'on déforme la courbe en conservant les longueurs, et si l'on modifie la force de manière que sa projection tangentielle reste la même, le mouvement sur la nouvelle courbe sera identique au précédent. On pourra en particulier rectifier la courbe et réduire la force à sa composante tangentielle. Ainsi le mouvement d'un point sur une courbe se ramène aisément au mouvement rectiligne d'un point libre.

Application : Mouvement d'un point pesant sur une circonférence : pendule simple.

Nous considérerons une circonférence située dans un plan vertical zOx (si elle était dans un plan oblique faisant l'angle φ avec l'horizon, on aurait les mêmes équations, seulement le poids du mobile serait $mg \sin \varphi$.) — Le point est soumis à son poids mg et à la réaction normale N ; on a l'équation des forces vives : $d \frac{mv^2}{2} = -mg dz$

d'où l'intégrale : $\frac{v^2}{2} = -gz + h$

Cette formule convient à un point pesant assujetti à rester sur une

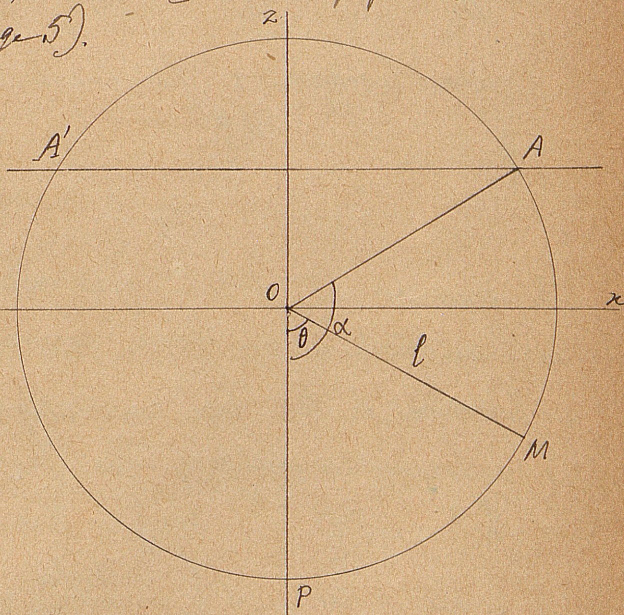
courbe quelconque dans un plan vertical : posons $a = \frac{h}{g}$;

$$V^2 = 2g(a - z)$$

Cette équation de la vitesse a une signification géométrique simple. Menons le plan horizontal : $z = a$

On voit que la vitesse a en chaque point de la courbe la même valeur numérique que si le mobile était tombé verticalement depuis ce plan sans vitesse initiale. On a ainsi une représentation de la vitesse, qui est proportionnelle à la racine carrée de la distance du point au plan fixe : $z = a$. — Cette représentation est analogue à celle de la tension d'un fil pesant, soit libre (1er cahier, page 140) soit posé sur une surface (2e cahier, page 5).

Supposons maintenant que la courbe est un cercle de centre O, et que le plan Π ($z = a$) le coupe en 2 points A, A' (ce plan ne peut être au-dessous de la circonférence, car alors v serait imaginaire.) Prenons pour paramètre l'angle d'écart $\theta = P\hat{O}M$, P étant le point le plus bas (sur Oz). Soit l le rayon du cercle (longueur du pendule simple) on a :



$$ds = l\,d\theta \qquad v = l\frac{d\theta}{dt} \qquad z = -l\cos\theta$$

Posons : $a = -l\cos\alpha \qquad \alpha = P\hat{O}A$. L'équation devient :

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha)$$

d'où l'on tire t par une quadrature.

Condition de réalité : $\cos\theta \geq \cos\alpha$ — d'où : $\theta \leq \alpha$.

Supposons qu'au début du mouvement θ soit croissant : v a le signe $+$ et s'annule pour $\theta = \alpha$. Or le point M arrive en A, car t reste fini quand θ tend vers α. Alors il retombe de A sans vitesse initiale : v devient négatif avec $\frac{d\theta}{dt}$: le radical aura le signe $-$, jusqu'à ce que M arrive en A' avec une vitesse nulle, d'où il retombera, le radical prenant alors le signe $+$, et ainsi de suite indéfiniment ; le mouvement sera une oscillation entre les positions extrêmes A, A'. — Calculons le temps dans ce mouvement :

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad \sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\pm\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

Prenons le signe $+$ par exemple.

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

t croît avec θ, et reste fini pour $\theta = \alpha$, car c'est une racine d'ordre $\frac{1}{2}$, et l'intégrale reste finie comme $\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta - \alpha}}$. On a la valeur de t en fonction de θ par une intégrale elliptique : nous allons la ramener à la forme canonique qui permet d'en faire l'inversion. Posons :

$$k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \sin\frac{\theta}{2} = ku \qquad 0 < k \leq 1 \qquad 0 \leq u \leq 1$$

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin ku \qquad d\frac{\theta}{2} = \frac{k\,du}{\sqrt{1-k^2u^2}}$$

L'intégrale devient :

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

d'où, en faisant l'inversion :

$$u = \operatorname{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad \sin\frac{\theta}{2} = k\operatorname{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-k^2u^2} = \operatorname{dn}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

Connaissant $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$, on calculera $\sin\theta$, $\cos\theta$, et par suite x, z en fonction de t.

Pour avoir la durée d'une demi-oscillation (de P en A) on devra prendre l'intégrale entre les limites 0 et 1 ; ce sera l'intégrale complète de 1re espèce ; donc : $\sqrt{\frac{g}{l}}\,T = K \qquad T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$.

K est une fonction du module k, c.à.d. de l'amplitude α des oscillations. Nous allons développer K suivant les puissances croissantes du module k. On a dans l'intégrale le facteur :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}} = (1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{Or :} \quad k^2u^2 < 1.$$

On peut donc le développer par la formule du binôme :

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}k^4u^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}k^6u^6 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4u^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6u^6 + \dots$$

Le terme général de ce développement sera :

$$\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\dots 2n}\,k^{2n}u^{2n}$$

Substituons ce développement dans l'intégrale complète ; chaque terme devra être multiplié par $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ et intégré de 0 à 1.

Le coefficient de k^{2n} dans le développement de K sera :

$$\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\dots 2n}\int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

L'intégrale qui y figure dépend de n ; posons : $\varphi(n) = \int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}}$

Nous allons établir une formule récurrente qui donnera $\varphi(n)$; on a d'abord :

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{d}{du}\left(u^{2n-1}\sqrt{1-u^2}\right) = (2n-1)u^{2n-2}\sqrt{1-u^2} - \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{(2n-1)u^{2n-2} - 2nu^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}$$

Intégrons entre 0 et 1 ; le 1er membre s'annule ; on a donc :

$$(2n-1)\varphi(n-1) - 2n\varphi(n) = 0 \qquad \varphi(n) = \frac{2n-1}{2n}\varphi(n-1)$$

formule récurrente cherchée, jusqu'à : $\varphi(1) = \frac{1}{2}\varphi(0)$

On a donc : $$\varphi(n) = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Le terme général du développement de K est :

$$k^{2n}\left(\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right)^2\frac{\pi}{2}$$ Le premier, pour $n=0$, est $\frac{\pi}{2}$.

On a donc : $$K = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots\ldots\right]$$

et : $$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots\ldots\right]$$

Quand α est très-petit, $k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}$ est très-petit, la série converge très-rapidement, et comme les oscillations employées en physique sont petites, on peut se borner sans erreur sensible aux premiers termes. On voit que T a une limite quand α tend vers 0 : pour α infiniment petit, on a $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$

La durée d'une oscillation infiniment petite est donc : $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Quand α est très petit, on peut négliger la 4e puissance de α, c.à.d. faire : $k^2 = \frac{\alpha^2}{4}$ $\qquad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)$

Telle est la formule employée en physique pour les petites oscillations du pendule.

Examinons maintenant le cas où la vitesse du point mobile ne s'annule en aucun point de la circonférence, c.à.d. où le plan $z = a$ passe au-dessus du cercle : $a > l$.

Le pendule tournera toujours dans le même sens, sa vitesse passera par un maximum : $\sqrt{2g(a+l)}$ au point le plus bas P, par un minimum : $\sqrt{2g(a-l)}$ au point le plus haut Q.

$$v^2 = 2g(a-z) \qquad l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a + l\cos\theta)$$

Faisons : $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ $\qquad l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\left(a + l - 2l\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

Posons : $k^2 = \frac{2l}{a+l} < 1.$ $\qquad l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a+l)\left(1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

D'où : $\frac{1}{2}\sqrt{2g\frac{a+l}{l^2}}\,dt = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}$ et, en intégrant :

$$\lambda t = \int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$ en posant : $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2g\frac{a+l}{l^2}}$

On a t par une intégrale elliptique de 1e espèce, qu'on ramène à la forme canonique en posant : $\sin\frac{\theta}{2} = u$

On aura, en faisant l'inversion : $u = \text{sn}\,\lambda t \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \text{cn}\,\lambda t$

Connaissant $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$, on calculera $\sin\theta$, $\cos\theta$ en fonction de t.

— Pour avoir la durée d'une demi-révolution, il faudra faire varier θ de 0 à π, c.à.d. $\sin\frac{\theta}{2} = u$ de 0 à 1 ; on aura donc :

$\lambda T = K$ intégrale complète de 1e espèce.

On connaît K ; on pourra le développer suivant les puissances de k.

Si k est très petit, c.à.d. si a est très grand, on pourra se contenter des premiers termes de la série, qui sera très convergente.

Étudions enfin le cas limite où la droite : $z = a$ est tangente au cercle, c.à.d. où l'on a : $a = l$

Alors la vitesse s'annule au point supérieur Q. Dans l'un et l'autre cas dont celui-ci est la limite, on a : $k^2 = 1$.

L'intégrale elliptique se réduit alors à une intégrale élémentaire qui donne une fonction exponentielle pour θ ;

$$\lambda\, dt = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \qquad \lambda t = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

sans constante arbitraire, car on prend $t = 0$ pour $\theta = 0$.

Si l'on cherche le temps que met le point mobile à arriver en Q, on trouve qu'il est infini :
$$T = \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty.$$

~~Ainsi~~ le pendule se rapprochera indéfiniment du sommet sans y arriver jamais. On peut remarquer que cette position asymptotique est une position d'équilibre instable, comme cela a lieu en général quand un point mobile s'approche indéfiniment d'un point fixe sans jamais l'atteindre.

Calculons la réaction normale. Soit N sa valeur comptée positivement sur le rayon OM depuis M vers le centre. La projection de la force $(-mg)$ sur ce rayon, c.à.d. sur la normale, est $+mg\frac{z}{l}$; on a donc :
$$N + mg\frac{z}{l} = \frac{mv^2}{l} \qquad \text{Or :} \quad v^2 = 2g(a - z)$$

$$N + mg\frac{z}{l} = \frac{2mg(a-z)}{l} \qquad N = \frac{mg}{l}(2a - 3z)$$

On a admis, ce qui est presque évident, que la réaction normale coïncide avec la normale principale. S'il fallait le démontrer, il suffirait de

rappeler la relation qui correspond à la binormale : $N_b + F_b = 0$
or F_b est constamment nulle, donc : $N_b = 0$.
L'expression de N est linéaire en z ; on voit que N diminue quand z augmente, c.à.d. quand le mobile s'élève ; son maximum a donc lieu en P, son minimum en Q. N peut s'annuler à la hauteur : $z = \frac{2a}{3}$, et devenir négative au-dessus de ce plan. — Pour savoir si N s'annule réellement, il faut distinguer 3 cas.
Supposons d'abord : $a < 0$ — La droite : $z = a$ traverse le cercle au-dessous du centre O, donc la droite : $z = \frac{2}{3}a$ passe au-dessus de la précédente, et par conséquent le point ne l'atteint pas dans ses oscillations, qui s'arrêtent aux points A, A'. Ainsi la réaction normale est toujours positive tant que l'amplitude α de l'oscillation est inférieure à 1 droit.
Supposons ensuite : $0 < a < \frac{3l}{2}$. La droite $z = a$ se trouve au-dessus du centre, et la droite : $z = \frac{2}{3}a$ coupe la circonférence en 2 points B, B' situés au-dessous des points A, A' (s'ils existent.) Le point mobile passe par ces points, et en ces points la réaction normale s'annule en changeant de signe ; la pression du point mobile sur la circonférence, égale et opposée à cette réaction, est centripète au-dessus de ces points, tandis qu'elle est centrifuge au-dessous. Si le point peut quitter la circonférence du côté intérieur (comme s'il est attaché au centre par un fil flexible) il tombera librement à partir du p. B ou du p. B' avec la vitesse qu'il avait en ce point ; il décrira donc une parabole osculatrice au cercle en ce point (et par là entièrement déterminée),

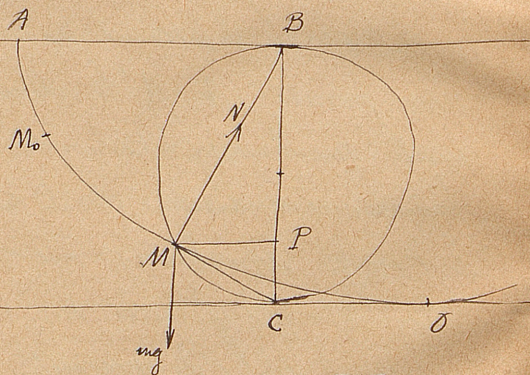
car l'accélération (ou la force) étant continue, le rayon de courbure (qui intervient dans la formule de l'accélération normale : $m\frac{V^2}{\ }$) doit être continu, c.à.d. qu'au point B la parabole de chute libre (d'axe vertical) a le même rayon de courbure (l) que le cercle.

Enfin, si : $a > \frac{3}{2}l$, la droite : $z = \frac{2}{3}a$ ne rencontrera pas la circonférence, et le point mobile exercera constamment une réaction centrifuge sur la circonférence ; donc, même attaché par un fil flexible ou simplement posé à l'intérieur du cercle, il ne tombera pas.

— Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde (Huyghens).

Pendule cycloïdal

On suppose que la cycloïde a sa base horizontale et tourne sa concavité vers le haut. Soit M le point générateur de la cycloïde, O le point le plus bas de la courbe ; on sait que l'arc OM de la courbe est égal au double de la tangente MC : en comptant l'arc s à partir de O, on a : $s = 2MC$.



Le point M est soumis à la réaction normale MN et à son poids mg : on a pour la vitesse la formule générale : $V^2 = 2g(a-z)$

Or : $z = CP$ $\quad \overline{MC}^2 = BC.CP = 2Rz$ $\quad z = \frac{s^2}{8R}$

Donc $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g\left(a - \frac{s^2}{8R}\right)$

Cette équation différentielle définit s en fonction du temps ; ainsi le paramètre q qui détermine la position du mobile est ici l'arc de la courbe

On aura t en fonction de s par une intégrale élémentaire (ou arc sin ou arc cos.) — Supposons, pour préciser les conditions initiales, que le point mobile soit abandonné à lui-même en M_0 sans vitesse initiale : $s_0 = OM_0$ $\quad v_0 = 0 = a - \frac{s_0^2}{8R}$ $\quad a = \frac{s_0^2}{8R}$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{g}{4R}\left(s_0^2 - s^2\right) \qquad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt = \frac{ds}{\pm\sqrt{s_0^2 - s^2}}$$

On doit prendre le signe —, car s diminue quand t augmente. Si l'on compte le temps à partir de la position M_0 ($t_0 = 0$) :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \arccos\frac{s}{s_0} \qquad \text{ou} \qquad s = s_0 \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}\right)$$

Ainsi s est une fonction périodique du temps. Le mouvement se compose d'une succession indéfinie d'oscillations égales.

Calculons le temps que met le point M à tomber de M_0 en O : pour cela, cherchons la 1e valeur de t qui annule s : c'est

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

La durée d'une oscillation complète est : $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

On voit qu'elle ne dépend pas de s_0, c.à.d. de l'amplitude des oscillations. Le mouvement du pendule cycloïdal est donc tautochrone même pour les oscillations d'amplitude finie. On peut remarquer que la durée d'une oscillation finie quelconque est égale à celle de l'oscillation infiniment petite d'un pendule circulaire de longueur $4R$. C'est d'ailleurs la longueur du rayon de courbure de la cycloïde en O.

On peut obtenir aisément la réaction normale, car on connaît le rayon de courbure de la cycloïde : $\quad \rho = 2\,\overline{MB}$.

Soit α l'angle de la normale MB avec la verticale BC. Comptons la normale positivement dans le sens MB, c.à.d vers le centre de courbure. La réaction est évidemment dirigée suivant la normale principale (v. page 32-33); elle est donc déterminée par l'équation:

$$N - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{2MB} \qquad \text{Or:} \quad MB = \frac{BP}{\cos\alpha} = \frac{2R-z}{\cos\alpha}$$

$$N = mg\cos\alpha + \frac{mv^2\cos\alpha}{2(2R-z)} \qquad \text{Faisons:} \quad v^2 = 2g(a-z)$$

$$N = mg\cos\alpha\left[1 + \frac{a-z}{2R-z}\right]$$

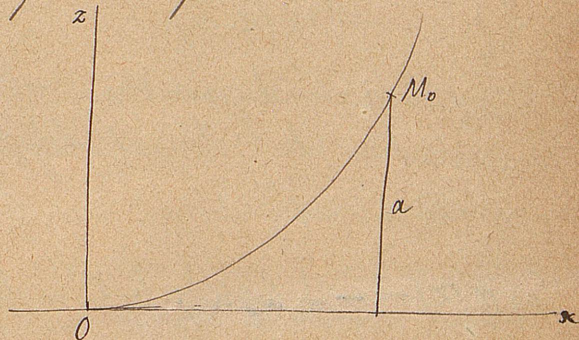
Considérons le cas particulier où le point M part sans vitesse initiale du point de rebroussement A. On a alors: $a = 2R$ puisque $\underline{a}$ est la cote du plan horizontal où la vitesse est nulle. Dans ce cas, on a simplement: $N = 2\,mg\cos\alpha$ donc:

Quand le mobile part du sommet sans vitesse initiale, la réaction normale est constamment égale au double de la composante normale du poids.

Proposons-nous maintenant de trouver toutes les courbes tautochrones c.à.d telles qu'un point mobile pesant abandonné sans vitesse initiale en un point quelconque de la courbe arrive toujours dans le même temps à un point fixe de cette courbe.

Remarquons d'abord qu'il existe une infinité de tautochrones gauches mais qu'elles se ramènent aux tautochrones planes. Nous avons vu (page 26) que le mouvement d'un point sur une courbe gauche ne dépend que de la longueur de cette courbe et de la composante tangentielle de la force. Projetons horizontalement une courbe tautochrone gauche par un cylindre vertical, et développons ce cylindre sur un plan vertical.

on sait que la courbe devient plane sans que ses longueurs changent. De plus, la projection du poids d'un point mobile sur la tangente à la courbe ne change pas, puisque l'angle de cette tangente avec chaque génératrice verticale est resté le même. Ainsi le mouvement n'a pas changé dans cette transformation ; donc si la courbe gauche est tautochrone la courbe plane l'est aussi, et réciproquement. On est ainsi ramené à la recherche des courbes tautochrones dans un plan vertical. Nous traiterons ce problème par la méthode de Puiseux.



Soit dans un plan vertical une courbe passant par l'origine : on suppose qu'un point pesant abandonné au point M_0 d'ordonnée $\underline{a}$ arrive toujours dans le même temps en O : on a la loi de vitesse :

$v^2 = 2g(a-z)$ d'où ; $\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2g(a-z)}$

Il faut prendre le signe $-$, car s, compté à partir de O, diminue quand $\underline{t}$ augmente :

$$\sqrt{2g}\, dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-z}} = -\frac{\varphi'(z)\, dz}{\sqrt{a-z}}$$

Pour avoir le temps de chute de M_0 en O, il faut intégrer de a à O ; $\sqrt{2g}\, T = \int_0^a \frac{\varphi'(z)\, dz}{\sqrt{a-z}}$

On a supposé l'arc défini par la relation :

$s = \varphi(z)$ — Pour qu'il y ait tautochronisme, il faut que T soit indépendant de $\underline{a}$. On exprime cette condition en écrivant que la dérivée de T par rapport à $\underline{a}$ est identiquement nulle.

Faisons d'abord le changement de variable ; $z = au$

afin de rendre les limites indépendantes du paramètre a: les limites pour u seront 0 et 1: $\sqrt{2g}\, T = \int_0^1 \frac{\sqrt{a}\, \varphi'(au)\, du}{\sqrt{1-u}}$

Prenons la dérivée par rapport à a:

$$\sqrt{2g}\, \frac{dT}{da} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} \left[\frac{\varphi'(au)}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a}\, \varphi''(au)\, u \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{[\varphi'(au) + 2au\, \varphi''(au)]\, du}{\sqrt{a(1-u)}} = \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{\varphi'(z) + 2z\varphi''(z)}{\sqrt{a-z}}\, dz$$

Cette intégrale devant être nulle quel que soit a, il faut que le numérateur de l'élément différentiel soit identiquement nul:

$\varphi'(z) + 2z\varphi''(z) = 0 \qquad \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = -\frac{1}{2z}$ Intégrons:

$\log \varphi'(z) = -\frac{1}{2} \log z + \log C = \log \frac{C}{\sqrt{z}} \qquad \varphi'(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}$

Intégrons encore: $\quad \varphi(z) = 2C\sqrt{z}$

La constante d'intégration doit être nulle car $\varphi(z) = s = 0$ pour $z = 0$. Ainsi: $\quad s = 2C\sqrt{z} \qquad z = \frac{s^2}{4C^2}$

Cette relation caractérise la cycloïde, quand l'arc est compté à partir du point le plus bas: $\quad z = \frac{s^2}{8R}$

On voit d'ailleurs que: $\frac{dz}{ds} = 0$ pour $s = 0$, ce qui prouve que la tangente en O est horizontale. La cycloïde qui répond à la question est donc tangente à l'axe Ox, et elle dépend du seul paramètre C, car: $\quad 2R = C^2$.

Ainsi la seule courbe tautochrone plane est la cycloïde à base horizontale, et toutes les tautochrones gauches s'obtiennent en enroulant cette courbe sur des cylindres quelconques verticaux.

On peut se proposer de trouver les courbes tautochrones pour d'autres lois de force. Le tautochronisme de la cycloïde, pour la pesanteur, vient de ce que la projection tangentielle du poids est proportionnelle à l'arc compté à partir du point d'arrivée O (point le plus bas.)
On a en coordonnées intrinsèques l'équation du mouvement sur la courbe : $m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \frac{dz}{ds}$ Or : $z = \frac{s^2}{8R}$ $\frac{dz}{ds} = \frac{s}{4R}$.

$m \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{mgs}{4R}$ ou : $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4R}s = -k^2 s$

C'est l'équation du mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance : $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x$
Nous avons vu (2e cahier, page 70) que ce mouvement est tautochrone.
On trouve en intégrant : $s = A\cos kt + B\sin kt$
Les 2 constantes A et B se déterminent par les conditions initiales.
Le mobile est à la distance s_0 au début ($t=0$) donc : $A = s_0$.
Il est abandonné sans vitesse initiale ; donc : $\frac{ds}{dt} = 0$, $B = 0$.
On a l'équation définitive : $s = s_0 \cos kt$
Pour avoir la durée de la chute, il suffit de trouver la 1re valeur positive qui annule s : $kt = \frac{\pi}{2}$ d'où : $t = \frac{\pi}{2k}$
Cette remarque permet de trouver les courbes tautochrones pour une loi de force quelconque. Soit la force F (X Y Z) qui est supposée ne dépendre que de la position du point mobile. On cherche les courbes telles, que si l'on abandonne le point sans vitesse initiale en M_0 point quelconque de une de ces courbes, le temps qu'il met à aller de M_0 à un point fixe O en suivant la courbe soit le même quel que soit M_0.

Supposons la courbe trouvée; la loi du mouvement du point sur la courbe est : $m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t$ (F_t projection de F sur la tangente)

Pour que le tautochronisme ait lieu, il faut et il suffit, d'après la remarque précédente, qu'on ait : $F_t = -k^2 s$

l'arc s étant compté à partir du point d'arrivée O. Remarquons que le point de tautochronisme O est une position d'équilibre stable pour le point assujetti à glisser sur la courbe, car en ce point : $F_t = 0$ c.à.d. que la force est normale à la courbe. — La condition de tautochronisme s'écrit :

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = -k^2 s$$

Le problème n'est pas déterminé. Pour le déterminer, on peut assujettir la courbe à se trouver sur une surface donnée, c.à.d. imposer à ses coordonnées la nouvelle condition $f(x, y, z) = 0$

avec la relation accessoire qui définit ds : $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$

Les 3 relations précédentes définissent sur la surface une famille de courbes tautochrones dépendant d'une constante.

Quand il y a une fonction de forces, la 1e équation s'intègre immédiatement : elle devient : $\frac{dV}{ds} = -k^2 s$ d'où : $V(xyz) = -\frac{k^2s^2}{2} + C$

On n'a plus qu'une équation différentielle du 1er ordre qui, si l'on y remplace x et y par leurs valeurs tirées des 2 premières, définit z en fonction de s, avec une constante —

Pour obtenir la cycloïde, par exemple, on assujettira la courbe à être dans un plan vertical : $y = 0$ Fonction des forces : $V = -mgz$

L'intégrale des forces vives est : $mgz = \frac{k^2s^2}{2} + C$

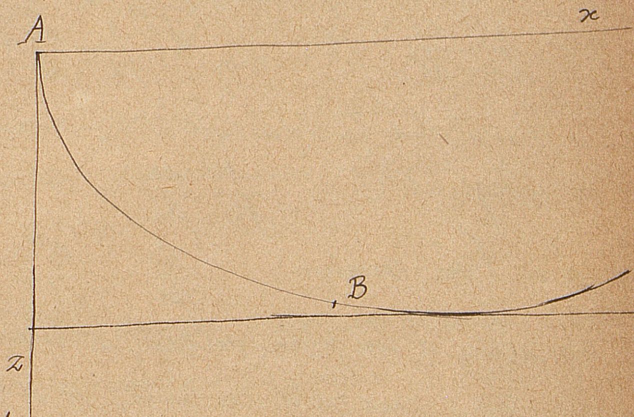
Or puisque le point O est l'origine, pour $s = 0$, $z = 0$, donc $C = 0$.

On a une relation de la forme : $z = \frac{s^2}{8R}$
qui caractérise la cycloïde.

La cycloïde est aussi la courbe brachistochrone ou de plus vite descente pour un point pesant.

Problème : Étant donnés 2 points A, B dans l'espace, trouver la courbe joignant ces 2 points telle qu'un point pesant abandonné en A sans vitesse initiale et glissant sans frottement sur la courbe arrive en B dans le moindre temps possible.

On va prouver que c'est une cycloïde à base horizontale ayant le point A pour point de rebroussement.



Prenons pour plan des xz le plan vertical de A, B, pour axe des x l'horizontale de A du côté de B, pour axe des z une verticale de A dirigée vers le bas. On a d'abord l'intégrale des forces vives : $\frac{mv^2}{2} = mgz + C$

Or pour $z = 0$, $v = 0$; donc $C = 0$: $v^2 = 2gz$

On comptera les arcs à partir du pt A : $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz}$

$\sqrt{2g}\, dt = \frac{ds}{\sqrt{z}}$ $\quad \sqrt{2g}\, T = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{z}}$

T est le temps de la chute de A en B ; il s'agit de trouver la courbe qui rend minimum l'intégrale prise de A en B. — Ce problème a été déjà traité à propos de l'équilibre des fils (2e cah. page 7).

On sait que la courbe qui rend minimum l'intégrale $\int_A^B \varphi(xyz)\, ds$ est la position d'équilibre d'un fil attaché en A, B, soumis aux forces dérivant du potentiel φ et à la tension φ; ses équations sont:

$$d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0 \qquad d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0 \qquad d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0$$

Ces 3 équations se réduisent à 2, car en multipliant la 1e par $\frac{dx}{ds}$ la 2e par $\frac{dy}{ds}$, la 3e par $\frac{dz}{ds}$ et en ajoutant, on aurait une identité.

Dans le cas présent, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{z}}$, et on a les équations différentielles:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dx}{ds}\right) = 0 \qquad d\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dy}{ds}\right) = 0 \qquad d\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{z}}}{\partial z} ds = 0$$

Puisqu'elles se réduisent à 2, nous négligerons la 3e. Les 2 premières s'intègrent:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dx}{ds} = C' \qquad \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dy}{ds} = C''$$

d'où l'on conclut $\frac{dy}{dx} = \frac{C''}{C'} = m \qquad y = mx + p$

équation d'un plan vertical. On sait que c'est le plan pris pour plan des xz, puisqu'il contient A et B. Faisons donc: $y = 0$; la 2e équation devient une identité; il ne reste donc, une fois le plan des xz déterminé, que la 1e: écrivons-la sous la forme:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2R}}$$

La constante R sera une longueur

~~Intégrons~~ $dx^2 = \frac{z}{2R} ds^2 = \frac{z}{2R}(dx^2 + dz^2) \qquad dx^2 = \frac{z}{2R-z} dz^2$

$$dx = \pm dz \sqrt{\frac{z}{2R-z}}$$

Nous prendrons au début le signe +, car x croît avec z dans la disposition d'axes que nous avons choisie. On aura en intégrant, l'équation de la brachistochrone:

$$x = \int_0^z \sqrt{\frac{z}{2R-z}}\, dz$$

Pour $z=0$, on a : $x=0$, et $\frac{dx}{dz}=0$; donc la courbe est tangente à la verticale en A. Pour que x soit réel, z doit être compris entre 0 et 2R ; il ne peut donc que croître. Tous les éléments étant positifs x augmente avec z jusqu'à $z=2R$. En ce point, $\frac{dx}{dz}=\infty$; la courbe est tangente à l'horizontale $z=2R$. A partir de là, z ne peut que décroître, et x augmentant toujours, $\frac{dx}{dz}$ change de signe ; on prendra alors le signe $-$ pour le radical, jusqu'à ce que $z=0$; on atteint ainsi un point de rebroussement sur Ax, puis les mêmes valeurs de z et de x se reproduisent indéfiniment.

Si l'on pose : $z=R(1-\cos\alpha)$ on a : $x=R(\alpha-\sin\alpha)$

ce sont les équations d'une cycloïde rapportée à sa base et à son point de rebroussement. La quantité soumise au radical est :

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=tg^2\frac{\alpha}{2} \qquad dx=tg\frac{\alpha}{2}\,dz \qquad z=\frac{dx}{d\alpha}$$

Nous allons maintenant chercher les courbes brachistochrones pour une loi de force quelconque. On peut employer la même méthode, pourvu qu'il y ait une fonction de forces : $U(x,y,z)$ pour $F(X,Y,Z)$. Soient $A(x_0\,y_0\,z_0)$ le point de départ, U_0 la valeur de U en ce point : on a l'intégrale des forces vives :

$$\frac{mv^2}{2}=U-U_0$$

car $v_0=0$ pour $U=U_0$.

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=U-U_0$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\,dt=\frac{ds}{\sqrt{U-U_0}} \qquad \sqrt{\frac{2}{m}}\,T=\int_A^B\frac{ds}{\sqrt{U-U_0}}$$

T est le temps de la chute de A en B.

On posera : $\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{U-U_0}}$. On aura, comme ci-dessus, 2 équations différentielles distinctes ; on déterminera les constantes

en écrivant que la courbe passe par les 2 points A et B.

Comme l'intégrale $\int_A^B \varphi\, ds$ représente le temps (à un facteur constant près) les théorèmes relatifs au minimum de cette intégrale ont dans ce cas une signification géométrique très simple. Par exemple, le théorème de Tait et Thomson signifie que, si l'on prend toutes les courbes brachistochrones normales à une même surface et que l'on porte sur chacune d'elles une longueur AB correspondant à la même valeur de l'intégrale $\int \varphi\, ds$, le lieu des points B sera une surface normale aux courbes – Autrement dit, si l'on fait partir en même temps des points mobiles sur toutes ces courbes à partir de la surface donnée, le lieu de ces points à chaque instant est une surface normale aux courbes –

Appliquons cette conséquence aux cycloïdes issues du point A (on peut les considérer comme normales à une sphère infiniment petite) elles sont toutes homothétiques par rapport à leur point de rebroussement A. Si l'on abandonne au même ~~instant~~ sans vitesse initiale des points pesants sur chaque cycloïde au point A, le lieu de ces points à un instant quelconque sera une surface normale aux cycloïdes et, dans le plan des xz, une trajectoire orthogonale de la famille des cycloïdes issues du point A comme point de rebroussement.

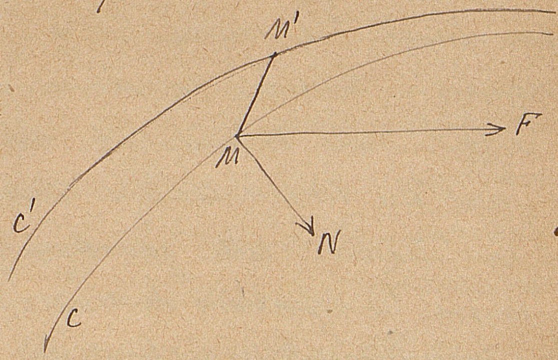
— Nous allons étudier maintenant le mouvement d'un point mobile sur une courbe qui change de position et même de forme avec le temps ; les équations de cette courbe seront de la forme

$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad f_1(x, y, z, t) = 0.$$

Le point M est soumis à la force donnée $F(XYZ)$ La réaction de la courbe, MN, est toujours normale, car on suppose qu'il n'y a pas de frottement.

Si l'on applique le théorème des forces vives, on n'élimine plus la réaction normale : $d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz +$ Tr. de N

En effet, si le point est à l'instant t, en M sur la courbe C ; il sera à l'instant $(t+dt)$ en M' sur la courbe voisine C', et en général le déplacement MM' ne sera pas normal à N, c.à.d tangent à C. Les projections de la réaction normale ont la même expression que quand la courbe est fixe : MN est la somme géométrique de 2 vecteurs normaux aux surfaces $f=0$, $f_1=0$; on a donc les équations du mouvement :



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

On a ainsi 5 équations qui déterminent $x, y, z, \lambda, \lambda_1$ en fonction du temps. Mais ce système est assez compliqué, et on peut ramener le problème au minimum d'opérations nécessaires, c.à.d. à l'intégration d'une équation différentielle du 2e ordre à 1 inconnue ; car il suffit d'un paramètre pour déterminer la position du point M.

Exprimons donc les coordonnées du point M en fonction d'un paramètre, c.à.d posons : $f_2(x, y, z, t) = q$

En résolvant les 3 équations f, f_1, f_2 par rapport à x, y, z, on en tirera ; $x = \varphi(q, t)$ $y = \psi(q, t)$ $z = \varpi(q, t)$

Si l'on donne à t une valeur numérique et qu'on laisse q variable ces équations représenteront la courbe C à l'instant t; de même, elles représenteront la courbe C' à l'instant $(t+dt)$. Si x, y, z sont considérés comme coordonnées du point M, q et t varieront à la fois, mais comme le pt M décrit une courbe déterminée, q doit être une certaine fonction de t.

Pour trouver cette fonction q, on emploie la méthode qui sert à trouver les équations de Lagrange. On multiplie les 3 équations du mouvement respectivement par $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$, $\frac{\partial\psi}{\partial q}$, $\frac{\partial\varpi}{\partial q}$; en ajoutant, les termes qui représentent la réaction normale disparaissent. En effet, $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$, $\frac{\partial\psi}{\partial q}$, $\frac{\partial\varpi}{\partial q}$ sont les paramètres directeurs de la tangente à la courbe C; $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont ceux de la normale à une des 2 surfaces qui passent par C, $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ ceux de la normale à l'autre surface; ces 2 normales étant perpendiculaires à la tangente, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varpi}{\partial q}=0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varpi}{\partial q}=0$$

On a donc l'équation :

$$m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial q}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial\varpi}{\partial q}\right]=Q=X\frac{\partial\varphi}{\partial q}+Y\frac{\partial\psi}{\partial q}+Z\frac{\partial\varpi}{\partial q}$$

On transformera cette équation comme dans le cas général de 3 paramètres $q_1\, q_2\, q_3$: on marquera par des accents les dérivées par rapport à t. Pour obtenir : $\quad T=\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)$

on tirera des équations en (q, t) les dérivées :

$$x'=\frac{\partial\varphi}{\partial q}q'+\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad y'=\frac{\partial\psi}{\partial q}q'+\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad z'=\frac{\partial\varpi}{\partial q}q'+\frac{\partial\varpi}{\partial t}$$

T devient fonction de q, q', t, quand on y porte ces expressions. L'équation du mouvement prend alors la forme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

On peut définir géométriquement Q par la considération d'un travail virtuel. Imprimons au point M un déplacement virtuel sur la courbe fixe C, en donnant à $\underline{t}$ une valeur numérique et à $\underline{q}$ un accroissement δq ; les accroissements des coordonnées seront : $\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q} \delta q$ $\quad \delta y = \frac{\partial \psi}{\partial q} \delta q$ $\quad \delta z = \frac{\partial \varpi}{\partial q} \delta q$

et le travail élémentaire de la force pour le déplacement $(\delta x, \delta y, \delta z)$ sera

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = Q \delta q$$

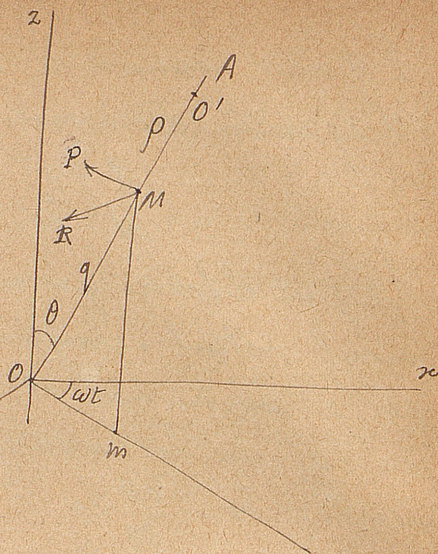
Donc, si l'on imprime à M un déplacement virtuel suivant C supposée fixe, en exprimant le travail virtuel de la force en fonction de $\underline{q}$, le coefficient de δq dans cette expression sera Q.

S'il existe une fonction de forces U, on y remplacera x, y, z par leurs expressions en q, t, et on aura : $Q = \frac{\partial U}{\partial q}$.

On voit par cet exemple que les équations de Lagrange s'appliquent aussi bien au cas d'une courbe mobile qu'à celui d'une courbe fixe et qu'elles permettent de ramener le problème à sa forme la plus simple.

Application. Considérons un axe vertical Oz, une droite OA faisant avec Oz l'angle constant $\underline{\theta}$ et tournant autour de Oz avec la vitesse angulaire constante ω ; cherchons le mouvement d'un point pesant mobile sans frottement sur la droite OA.

Le point M est soumis à son poids $-mg$, et à la réaction normale.



La position est déterminée par le paramètre $OM = q$. Les coordonnées polaires sont (l'angle des plans AOz, xOz étant ωt) : $q, \theta, \omega t$.

Pour avoir $T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$

(nous supposons la masse égale à 1)

calculons $ds^2 = dq^2 + q^2 \sin^2\theta . \omega^2 dt^2$

(le terme $q^2 d\theta^2$ est nul, θ étant constant)

$$T = \frac{1}{2}\left(q'^2 + \omega^2 \sin^2\theta . q^2\right)$$

La fonction de forces est : $U = -mgz$.

Or : $z = q\cos\theta$ $\quad U = -gq\cos\theta \quad Q = \frac{\partial U}{\partial q} = -g\cos\theta$

L'équation du mouvement est donc :

$$\frac{d}{dt}(q') - \omega^2 \sin^2\theta . q = -g\cos\theta$$

(éq. linéaire à coeff. const. ;

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \omega^2 \sin^2\theta\left(q - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}\right)$$

Posons : $q - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta} = \rho$.

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \omega^2 \sin^2\theta . \rho = k^2\rho$$

La variable ρ a une signification géométrique très simple : portons sur OA la longueur : $OO' = \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$

alors : $\rho = O'M$

On voit que l'équation du mouvement du point M sur OA est celle du mouvement d'un point mobile sur une droite fixe et repoussé par le point O' proportionnellement à la distance. On est ainsi ramené à un problème de mouvement rectiligne.

Le point O est une position d'équilibre relatif pour le point M, car si on le posait en ce point sans vitesse initiale $\left(\frac{d\rho}{dt}=0\right)$ il y resterait. C'est de plus une position d'équilibre relative instable ; car si on l'en écarte infiniment peu, la force tend à l'en éloigner davantage.

En intégrant, on obtient ρ en fonction de t :

$$\rho = Ae^{\omega t \sin\theta} + Be^{-\omega t \sin\theta} \qquad q = \rho + \frac{g\cos\theta}{\omega^2 \sin^2\theta}$$

On a en même temps la trajectoire, ou plutôt sa projection sur le plan horizontal : car ; $Om = q.\sin\theta$ (rayon vecteur) et l'on vient de trouver une relation entre q et ωt (angle polaire)

— Pour calculer la réaction normale, on peut la décomposer en 2 forces, P dans le plan AOz, R perpendiculaire à ce plan. On a immédiatement, en projetant les forces sur l'axe Oz :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + P\sin\theta \qquad \text{Or ;} \quad z = q\cos\theta$$

$$\text{donc ;} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2q}{dt^2}\cos\theta = \frac{d^2\rho}{dt^2}\cos\theta$$

Comme on connaît $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, on tire P d'une équation du 1er degré.

Pour trouver R, on peut projeter les forces sur Ox ou Oy ; ou mieux, appliquer le théorème des moments des quantités de mouvement ;

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = Rq\sin\theta \qquad \text{par rapport à } Oz$$

Or ; $xdy - ydx = q^2\sin^2\theta.\,\omega dt$

On tire immédiatement R d'une équation du 1er degré.

On peut aussi calculer la réaction normale en recourant aux équations primitives du mouvement.

— Étudions maintenant le mouvement d'un point sur une surface, fixe ou mobile. On peut considérer le point comme libre à la condition de lui appliquer la réaction normale de la surface. Dans le cas le plus général, la surface est représentée par l'équation :

$$f(x, y, z, t) = 0$$

Si la surface est fixe, le temps ne figurera pas dans f.

Les forces directement appliquées ont une résultante $F(XYZ)$. La réaction normale N a ses projections proportionnelles à $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial f}{\partial z}$; les équations du mouvement sont donc :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

Ces 4 équations (en y comprenant l'équation de la surface) définissent les 4 inconnues x, y, z, λ en fonctions du temps. Pour avoir le mouvement du point, on devra éliminer λ ; on aura x, y, z en fonction de t. On calculera ensuite λ au moyen des équations mêmes du mouvement. — Quand la surface est fixe on peut éliminer λ en appliquant le théorème des forces vives :

$$d\frac{mV^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz$$ car l'on a pour le coefficient de λ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df(x, y, z) = 0.$$

Ce fait analytique s'interprète géométriquement : si la surface est fixe le déplacement réel du point (dx, dy, dz) est normal à la réaction. On a ainsi une 1e équation indépendante de λ ; on en obtiendra une 2e en éliminant λ entre les autres équations.

Quand la surface est mobile, l'équation des forces vives contient la réaction normale: $d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt$

car; $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$

On peut se rendre compte géométriquement de ce fait, parce que le déplacement réel du point n'est pas normal à la réaction, la surface ayant varié d'un instant à l'autre.

Dans tous les cas, on peut éliminer λ par la méthode de Lagrange, et réduire le problème à 2 équations (minimum) Pour cela on exprime les coordonnées de la surface en fonction de 2 paramètres. Analytiquement, cela revient à joindre à l'équation de la surface 2 équations nouvelles: $f_1(xyzt) = q_1$ $\quad f_2(xyzt) = q_2$

De ces 3 équations on tirera:

$$x = \varphi(q_1 q_2 t) \qquad y = \psi(q_1 q_2 t) \qquad z = \varpi(q_1 q_2 t)$$

Si $q_1 q_2$ sont les paramètres qui correspondent au point mobile, ce seront des fonctions du temps. Pour connaître le mouvement du point, il suffira de déterminer ces fonctions: on aura donc 2 équations à trouver: c'est le minimum de conditions nécessaires.

Pour cela on effectuera la combinaison de Lagrange: on multipliera les 3 équations respectivement par $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}$ $\frac{\partial \psi}{\partial q_1}$ $\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}$ et on les ajoutera; le résultat sera débarrassé de λ.

Géométriquement, on élimine λ en imprimant au point mobile un déplacement virtuel sur la surface S: donnons à <u>t</u> une valeur numérique qui fixe S, et laissons q_2 fixe; à l'accroissement de q_1 correspondront les accroissements suivants des coordonnées du point:

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 \qquad \delta y = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \delta q_1 \qquad \delta z = \frac{\partial \varpi}{\partial q_1} \delta q_1$$

Comme ce déplacement s'effectue sur la surface S, il est perpendiculaire à la réaction normale ; aussi son travail virtuel est nul, et λ disparait :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}\right) = Q_1$$

en posant :

$$Q_1 = X\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}$$

On a de même :

$$m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial \varpi}{\partial q_2}\right] = Q_2$$

en considérant un autre déplacement virtuel sur S obtenu en faisant varier q_2 seul — Telles sont les 2 équations du mouvement, dégagées de la réaction normale. En remplaçant $x\,y\,z$ par leurs expressions en fonction de $q_1\,q_2\,t$, on aura 2 équations différentielles simultanées du 2e ordre définissant $q_1\,q_2$ en fonction de t — On peut les ramener à la forme de Lagrange : en désignant par des accents les dérivées par rapport à $\underline{t}$, on a :

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad y' = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} q_1' + \dots \qquad z' = \frac{\partial \varpi}{\partial q_1} q_1' + \dots$$

$$T = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$$

On remplace $x'\,y'\,z'$ par leurs expressions en $q_1\,q_2\,q_1'\,q_2'\,t$; T devient une fonction du 2e degré en $q_1'\,q_2'$, homogène si x, y, z ne contiennent pas le temps.

On a alors les 2 équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

On calculera, comme toujours, les seconds membres $Q_1\ Q_2$ par la

considération d'un déplacement virtuel obtenu en faisant varier seulement q_1 ou q_2 ; le travail virtuel de la force pour ces déplacements : $(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ prend alors la forme :

$Q_1 \delta q_1$ ou $Q_2 \delta q_2$ d'où l'on tire Q_1, Q_2

S'il existe une fonction des forces : $U(x, y, z)$

elle devient, quand on y substitue les expressions de x, y, z fonction de $q_1\, q_2$, et on a : $Q_1 = \frac{\delta U}{\delta q_1}$ $Q_2 = \frac{\delta U}{\delta q_2}$

Dans le cas d'une surface fixe : $f(x, y, z) = 0$

on peut toujours exprimer les coordonnées du point mobile en fonction de $q_1\, q_2$, sans y faire figurer t ; et comme :

$$T = \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$$

on peut le calculer aisément quand on connaît l'élément linéaire ds^2, qui s'exprime par une forme quadratique en dq_1, dq_2 ; alors T est homogène et du 2e degré en q_1', q_2' :

$$T = \frac{m}{2}\left(A q_1'^2 + 2B q_1' q_2' + C q_2'^2\right)$$

Examinons le cas le plus simple, celui où le point est lancé sur une surface fixe et n'est sollicité par aucune force : $F = 0$. Il n'est donc soumis qu'à la réaction normale. L'équation des forces vives nous apprend qu'alors la vitesse est constante :

$$d\frac{mv^2}{2} = 0 \qquad v = v_0$$

Le point mobile décrit dans ce cas une ligne géodésique de la surface ; en effet, quand un mobile se meut librement, le plan osculateur de sa trajectoire contient son accélération, donc la force qui agit sur lui ; ici cette force est la réaction normale ; par conséquent

le plan osculateur à la courbe décrite par le point contient la normale à la surface, ce qui est la définition des lignes géodésiques.

On a vu (2e cahier, page 6) qu'un fil tendu sur une surface et soumis à aucune force, si ce n'est à ses extrémités, se dispose suivant une ligne géodésique de cette surface, et que la tension est la même en tous ses points. La même propriété vient d'être démontrée pour la trajectoire d'un point soumis à aucune force en remplaçant la tension par la vitesse; seulement, dans le cas d'un fil, la réaction normale est dirigée vers la convexité de la courbe, et dans le cas du point mobile, vers la concavité. — Le théorème des forces vives donne une intégrale première: $\frac{mv^2}{2} = C^{te}$ c.à.d. $T = C^{te}$

On a d'ailleurs, la force étant nulle: $Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0.$

Dans le cas général d'une surface fixe et d'une fonction des forces, on peut remplacer une des 2 équations de Lagrange par l'intégrale des forces vives: $\frac{mv^2}{2} = V + h$

et l'on a le système d'une équation du 2e ordre et d'une équation du 1er:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \qquad T = V + h$$

Application. Recherche des lignes géodésiques des surfaces de révolution

Prenons pour Oz l'axe de révolution. Soit: $z = \varphi(x)$ l'équation de la méridienne dans le plan des xz. L'équation de la surface sera: $z = \varphi(r)$ en posant: $r = \sqrt{x^2+y^2}$ distance d'un point de la surface à l'axe, c.à.d. rayon de son parallèle. Ce rayon se projette en vraie grandeur en Om; pour définir le point M, il suffit de donner les coordonnées polaires r et θ de m dans Oxy.

ce seront les paramètres $q_1\, q_2$ (z est connu quand r est donné)
Calculons l'élément linéaire de la surface :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = (1+\varphi'^2)dr^2 + r^2 d\theta^2$$

(Nous supposons toujours la masse du point égale à 1) Donc :

$$T = \frac{1}{2}\left[(1+\varphi'^2)r'^2 + r^2\theta'^2\right]$$

Les équations de Lagrange sont :

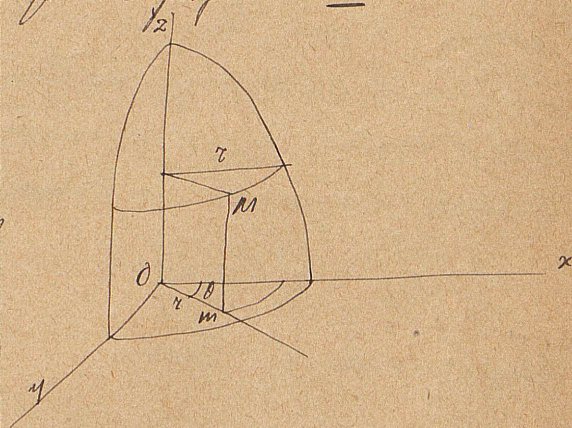
$$\frac{d}{dt}\left[(1+\varphi'^2)r'\right] - \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = r\theta'^2 + \varphi'\varphi'' r'^2$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Remplaçons la 1e par l'intégrale des forces vives : $T = h$.
On a, en intégrant la 2e :

$$r^2\theta' = C \qquad \frac{1}{2}\left[(1+\varphi'^2)r'^2 + r^2\theta'^2\right] = h$$

La 1e de ces équations exprime que la projection $\underline{m}$ tourne autour de O suivant la loi des aires.
Ce fait était à prévoir, car la seule force qui agisse sur M est la réaction ~~normale~~ qui est toujours dans un même plan avec Oz (soit qu'elle rencontre Oz, soit qu'elle lui soit parallèle.) Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les 2 équations précédentes ;



$$(1+\varphi'^2)dr^2 + r^2 d\theta^2 = 2h\,dt^2 \qquad \text{Or}\; r^2 d\theta = C\,dt \qquad dt = \frac{r^2 d\theta}{C}$$

$$(1+\varphi'^2)dr^2 + r^2 d\theta^2 = \frac{2h}{C^2} r^4 d\theta^2 = \frac{r^4 d\theta^2}{\alpha^2} \qquad \text{en posant} \quad \alpha^2 = \frac{C^2}{2h}.$$

$$\left(\frac{r^2}{\alpha^2}-1\right)r^2 d\theta^2 = (1+\varphi'^2)dr^2 \qquad d\theta = \pm \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2}{\frac{r^2}{\alpha^2}-1}}$$

On a $\underline{\theta}$ en fonction de $\underline{r}$ par une quadrature ; c'est l'équation de la projection de la ligne géodésique sur le plan des xy. La constante d'intégration n'influe pas sur la forme de la courbe, car faire varier cette constante, c'est faire tourner la courbe autour de l'axe Oz ; sa forme ne dépend donc que du paramètre α, c.à.d. de C et de $\underline{h}$.

On pourra achever le calcul dans chaque cas particulier, par exemple, pour un hyperboloïde de révolution à une nappe ; pour une valeur convenable de α, on trouvera les génératrices rectilignes de la surface ; la réaction normale devra être nulle le long de ces droites, que le point mobile suivra librement. — On peut aussi effectuer les calculs pour la surface engendrée par une chaînette tournant autour de sa base (surface d'aire minimum.)

— Exemple Recherche des lignes géodésiques d'une surface du 2d ordre à centre. — Nous emploierons la méthode de Jacobi (cf p. 10 sqq.) On aura 2 équations du mouvement sous la forme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}$$

Transformation de Poisson : $\quad p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}$

équations du 1er degré en q_1', q_2', qu'on résout par rapport à q_1', q_2'.

On prend : $K = p_1 q_1' + p_2 q_2' - T$ et on pose : $H = K - U$

H est une fonction de $q_1\, q_2\, p_1\, p_2\, t$. Les équations canoniques de Hamilton sont :

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

Le théorème de Jacobi ramène l'intégration de ce système à celle d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1 q_2, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, t\right) = 0$$

L'intégrale complète de cette équation contient 3 constantes ; mais il y en a une additive (V ne figurant pas dans l'équation) il suffit d'avoir une intégrale contenant 2 constantes non additives

$$V(q_1, q_2, t, \alpha, \beta)$$

Les équations du mouvement seront alors : $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha'$ $\frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta'$ qui définissent q_1 q_2 en fonction du temps et des 4 constantes arbitraires $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$. Ce sont les équations finies du mouvement.

— Appliquons cette méthode aux surfaces du 2e ordre, en employant les coordonnées elliptiques dans l'espace ; soit l'équation :

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0$$

et soient $q_1 q_2 q_3$ les 3 paramètres (λ) des 3 surfaces homofocales du 2e ordre passant par un point donné (c.à.d. les coordonnées elliptiques de ce point). L'élément linéaire engendré par le déplacement infiniment petit du point est :

$$4ds^2 = M_1 dq_1^2 + M_2 dq_2^2 + M_3 dq_3^2$$ où :

$$M_1 = \frac{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}{f(q_1)}$$ en posant : $f(\lambda) = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$

Cherchons les lignes géodésiques de la surface (supposons que ce soit un ellipsoïde, c.à.d. que a, b, c soient de même signe) :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

Par chaque point M de cette surface passent 3 surfaces homofocales,

parmi lesquelles figure l'ellipsoïde, correspondant au paramètre $q_3 = 0$. Les 2 autres paramètres $q_1\, q_2$ seront les coordonnées elliptiques du point M sur l'ellipsoïde. On aura donc pour un déplacement infiniment petit de M sur l'ellipsoïde, l'élément linéaire : $4ds^2 = M_1 dq_1^2 + M_2 dq_2^2$ où :

$$M_1 = \frac{(q_1 - q_2)\, q_1}{f(q_1)} \qquad M_2 = \frac{(q_2 - q_1)\, q_2}{f(q_2)}$$

On a alors : $T = \frac{m}{8}\left(M_1 q_1'^2 + M_2 q_2'^2\right)$ ou en posant : $m = 4$, $T = \frac{1}{2}\left(M_1 q_1'^2 + M_2 q_2'^2\right)$ Or : $K = T$, parce que la surface étant fixe, x, y, z ne contiennent pas t, donc q_1, q_2 non plus. D'ailleurs, la force étant nulle : $V = 0$; donc : $H = T$. On a : $p_1 = M_1 q_1'$ $p_2 = M_2 q_2'$

d'où : $q_1' = \frac{p_1}{M_1}$ $q_2' = \frac{p_2}{M_2}$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{M_1} + \frac{p_2^2}{M_2}\right)$$

Écrivons l'équation de Jacobi :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{M_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{M_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2\right] = 0$$

ou :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2(q_1 - q_2)}\left[\frac{f(q_1)}{q_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{f(q_2)}{q_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2\right] = 0.$$

En chassant le dénominateur, le 1er membre se divise en une fonction de q_1 et une fonction de q_2 ; on aura donc une intégrale de la forme : $V = -ht + \varphi(q_1) + \psi(q_2)$ Substituons :

$$-2h(q_1 - q_2) + \varphi'(q_1)^2 \frac{f(q_1)}{q_1} - \psi'(q_2)^2 \frac{f(q_2)}{q_2} = 0$$

Séparons : $-2hq_1 + \varphi'(q_1)^2 \frac{f(q_1)}{q_1} = -2hq_2 + \psi'(q_2)^2 \frac{f(q_2)}{q_2}$

Pour que cette identité soit vérifiée, il faut que les 2 membres soient égaux séparément à une même constante 2α ; on en tire :

$$\varphi'(q_1) = \sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_1)\,q_1}{f(q_1)}} \qquad \psi'(q_2) = \sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_2)\,q_2}{f(q_2)}}$$

et l'intégrale complète cherchée sera :

$$V = -ht + \int\sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_1)\,q_1}{f(q_1)}}\,dq_1 + \int\sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_2)\,q_2}{f(q_2)}}\,dq_2$$

Les équations finies du mouvement seront :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = h' \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha'$$

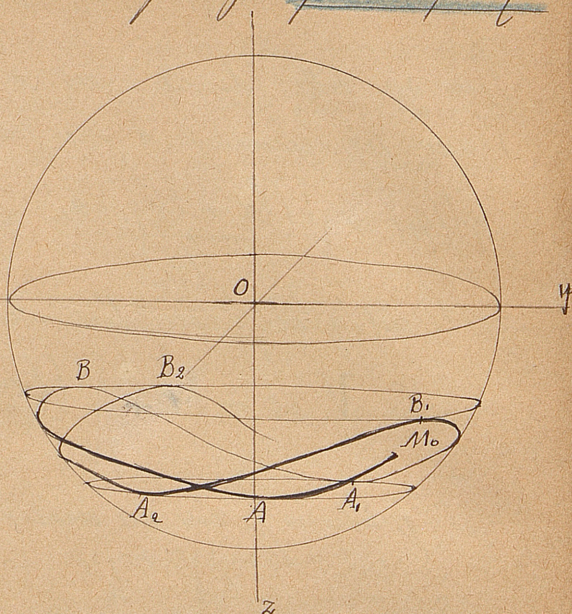
Nous savons que la 1e donne le temps ; pour avoir l'équation des lignes géodésiques, il faut prendre la 2e, qui est une relation entre q_1 et q_2 : elle s'écrit :

$$\int\frac{\sqrt{q_1}\,dq_1}{\sqrt{(2\alpha + 2hq_1)\,f(q_1)}} + \int\frac{\sqrt{q_2}\,dq_2}{\sqrt{(2\alpha + 2hq_2)\,f(q_2)}} = \alpha'.$$

On a 2 quadratures hyperelliptiques à effectuer : en effet, $f(q_1)$ est du 3e degré, donc le radical du dénominateur est du 4e ; mais le radical du numérateur passe au dénominateur, ce qui donne sous $\sqrt{}$ un polynôme du 5e degré. On fera l'inversion de ces intégrales au moyen des fonctions Θ à 2 variables indépendantes, suivant la méthode de M. Weierstrass.

— Mouvement d'un point pesant sur une sphère fixe : pendule sphérique

Soit O le centre de la sphère, prenons Oz vertical dirigé vers le bas ; on pourra substituer aux coordonnées x et y les coordonnées polaires r et θ dans le plan horizontal de O : soit l la longueur du pendule (rayon de la sphère) ; on aura :



$x^2+y^2=r^2 \qquad r^2+z^2=l^2$

Il s'agit de trouver 2 équations indépendantes de la réaction normale. Comme la surface est fixe, le théorème des forces vives en donne une : $v^2=2gz+h$

D'autre part le moment de la résultante des forces par rapport à Oz est nul ; le théorème du moment des quantités de mouvement fournit une 2e équation, qui exprime que la projection du point M sur le plan xOy tourne autour de O suivant la loi des aires :

$$r^2 d\theta = C dt$$

On a ainsi 2 intégrales premières du problème, avec 2 constantes que déterminent les conditions initiales. $h = v_0^2 - 2gz_0$

C est le moment de v_0 par rapport à l'axe Oz.

La seconde équation montre que le point M tourne toujours dans le même sens autour de l'axe Oz, parce que $\frac{d\theta}{dt}$ a un signe constant. Ce sens est déterminé par celui de la vitesse initiale (si v_0 était dans le même plan que Oz, on aurait le pendule simple sur une circonférence)

Remplaçons v par sa valeur dans la 1re équation :

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + h$$

Calculons dr et dt.

$r^2 = l^2 - z^2 \qquad r\,dr = -z\,dz \qquad dr^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)dz^2 = \frac{l^2}{r^2}dz^2$

$dt = \frac{r^2 d\theta}{C} \qquad r^2 d\theta^2 + \frac{l^2}{r^2}dz^2 = (2gz+h)\,\frac{r^4 d\theta^2}{C^2}$

On a ainsi une relation entre z et θ qui définit la trajectoire sur la sphère:
$$C^2\frac{l^2}{r^2}dz^2 = r^2 d\theta^2\left[(2gz-h)r^2 - C^2\right]$$

Posons:
$$\varphi(z) = (2gz+h)(l^2 - z^2) - C^2$$

on obtient:
$$d\theta = \pm\frac{C\,l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{\varphi(z)}}$$

L'équation qui donne le temps est:

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{C} \qquad dt = \pm\frac{l\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

On a ainsi les équations finies du mouvement par 2 intégrales elliptiques, $\varphi(z)$ étant du 3e degré. Rendons-nous compte d'abord de la nature de ses racines; si l'on substitue dans $\varphi(z)$ les valeurs:

	$-\infty$,	$-l$,	z_0,	$+l$,	$+\infty$
on trouve:	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

En effet, pour $z = \pm l$, $\varphi(z) = -C^2$; or $C^2 > 0$, sans quoi le mouvement se ferait dans un plan vertical (pendule simple); d'autre part pour $z = z_0$, on a nécessairement $\varphi(z) > 0$, sans quoi $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ serait imaginaire, ce qui est impossible, la vitesse initiale étant toujours une donnée réelle

$\varphi(z)$ a donc ses 3 racines réelles α, β, γ dans l'ordre de grandeur:
$$l > \underline{\alpha} > z_0 > \underline{\beta} > -l > \gamma$$

On peut donc écrire : $\varphi(z) = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) = 2g(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma)$.

Supposons d'abord : $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 > 0$

On devra prendre au début du mouvement les 2 radicaux avec le signe + ; donc z croît, c.à.d. le mobile descend, jusqu'à ce que $z = \alpha$; (puisque z_0 est compris entre α et β) z ne peut dépasser α, car $\varphi(z)$ deviendrait négatif donc $\frac{dz}{dt}$ imaginaire ; α est donc le maximum de z ; d'ailleurs, pour $z = \alpha$, $\frac{dz}{dt} = 0$, donc la vitesse est horizontale, c.à.d. la trajectoire est tangente au parallèle $z = \alpha$ au point A. — A partir de ce point, z décroît, donc $\frac{dz}{dt} < 0$, on devra prendre les radicaux avec le signe −, jusqu'à ce que $z = \beta$, où $\frac{dz}{dt}$ s'annule de nouveau : la trajectoire est tangente en B au parallèle $z = \beta$, qui correspond au minimum de z. — Puis z croît de nouveau, les radicaux reprennent le signe +, et ainsi de suite, la trajectoire va du cercle $z = \alpha$ au cercle $z = \beta$ en les touchant alternativement.

Il est aisé de voir que les branches successives de la trajectoire, comprises entre 2 contacts consécutifs avec les cercles extrêmes, sont symétriques les unes des autres : par exemple, les branches AB et BA, sont symétriques par rapport au plan méridien de B : en effet, θ ne dépend que de z, donc à des variations égales de z correspondent des variations égales de θ. — Il suffit donc d'avoir une seule branche AB pour avoir son prolongement symétrique BA_1, puis toutes les branches successives en faisant tourner la courbe sphérique ABA_1 autour de Oz de manière à amener A en coïncidence avec A_1.

On peut remarquer que le plan moyen $z = \frac{\alpha+\beta}{2}$ est toujours au-dessous du centre : en effet, le coefficient de z^2 dans $\varphi(z)$ est la somme des produits des racines 2 à 2 :

$$2gl^2 = -2g(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) \qquad l^2+\alpha\beta = -\gamma(\alpha+\beta)$$

Or $\alpha\beta < l^2$, puisque α et β sont compris entre $-l$ et $+l$; donc $\alpha+\beta > 0$, attendu que $\gamma < 0$. On peut en tirer :

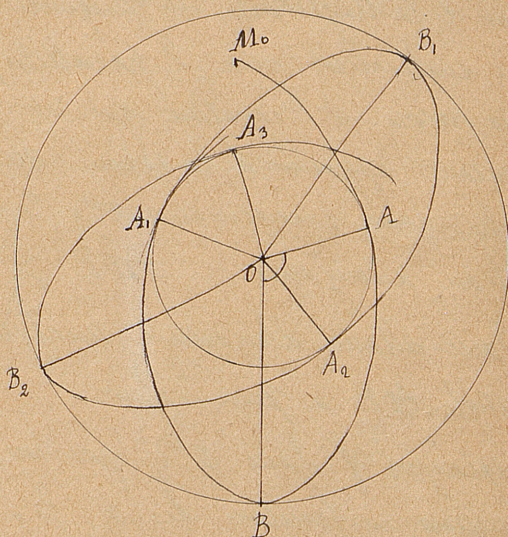
$$-\gamma = \frac{l^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

La 3e racine s'exprime au moyen des 2 premières.

Étudions la projection de la trajectoire sur le plan horizontal.

Nous distinguerons 2 cas :

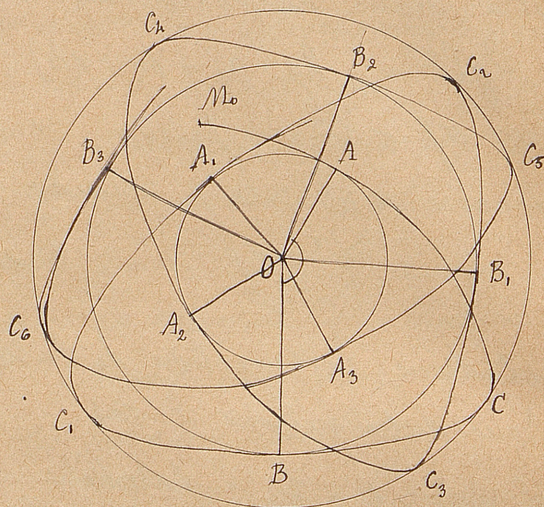
1° $\beta > 0$; les 2 parallèles extrêmes sont au-dessous du centre ; le parallèle β enveloppe, en projection, le parallèle α. La projection de la trajectoire est une courbe convexe tournant toujours dans le même sens autour de O et touchant alternativement les 2 parallèles ; ses branches successives sont symétriques, AB, BA₁ par rapport à OB ; BA₁, A₁B₁ par rapport à OA₁, etc, de sorte que OB, OA₁, etc sont des axes de la courbe.



Quand on observe un pendule sphérique oscillant, il semble décrire une espèce d'ellipse sphérique qui tourne autour de la verticale (Oz) dans le sens du mouvement. Cette apparence tient à ce que l'angle AOB

est plus grand qu'un droit. Si, en effet, l'angle AOB était droit, l'ellipse paraîtrait fixe, et s'il était inférieur à un droit, elle semblerait rétrograder sur le mouvement du pendule.

2° $\beta < 0$; on a toujours : $\alpha > 0$, donc les 2 parallèles sont de part et d'autre du centre, mais le parallèle supérieur est plus près de l'équateur que le parallèle inférieur. En projection, l'équateur enveloppe le cercle β_2 qui entoure le cercle α. La projection de la trajectoire est tangente non-seulement aux 2 parallèles, mais encore à l'équateur, qui est le contour apparent de la sphère : elle touche donc successivement les 3 cercles en $A, C, B, C_1, A_1, C_2, B_1, \ldots$ et l'on a toujours : $A\hat{O}B > \frac{\pi}{2}$.



Nous allons démontrer analytiquement cette propriété, d'après Puiseux.

L'angle AOB a pour valeur : $\Theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Cl\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{\varphi(z)}}$

Remplaçons γ dans $\varphi(z)$ par son expression en fonction de α, β :

$$\varphi(z) = 2g(\alpha - z)(z-\beta)\left(z + \frac{l^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) = \frac{2g}{\alpha+\beta}(\alpha-z)(z-\beta)\left[z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta\right]$$

D'autre part : $\varphi(l) = -C^2$ donc :

$$-C^2 = \frac{2g}{\alpha+\beta}(\alpha-l)(l-\beta)(l+\alpha)(l+\beta) \qquad C^2 = \frac{2g}{\alpha+\beta}(l-\alpha)(l-\beta)(l+\alpha)(l+\beta)$$

Posons : $A = \sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)}$ $\qquad B = \sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)}$

$$C = AB\sqrt{\frac{2g}{\alpha+\beta}}$$

On a donc:

$$\Theta = \int_\alpha^\beta \frac{AB\, l\, dz}{l^2-z^2\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)\left[z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta\right]}}$$

par une intégrale elliptique. — Nous aurons des limites de Θ en remplaçant le dernier facteur du radical par des limites P et Q:

$$P < z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta < Q$$

z variant de α à β. On aura par suite:

$$\frac{AB}{\sqrt{Q}}\int_\alpha^\beta \frac{l dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} < \Theta < \frac{AB}{\sqrt{P}}\int_\alpha^\beta \frac{l dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}}$$

Calculons l'intégrale: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{l dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} = I.$

$$\frac{l}{l^2-z^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{l+z}+\frac{1}{l-z}\right]$$

Posons: $z = \alpha\cos^2 u + \beta\sin^2 u$:

$$dz = 2(\beta-\alpha)\sin u\cos u\, du \qquad \sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)} = (\alpha-\beta)\sin u\cos u.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{l+\alpha\cos^2 u+\beta\sin^2 u} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{l-\alpha\cos^2 u-\beta\sin^2 u}$$

Posons: $\sqrt{\frac{l+\beta}{l+\alpha}}\,\mathrm{tg}\,u = x$ $\qquad \sqrt{\frac{l-\beta}{l-\alpha}}\,\mathrm{tg}\,u = y$:

$$I = \frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{A}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right) = \frac{\pi(A+B)}{2AB}$$

On a donc: $\displaystyle\frac{\pi}{2}\frac{A+B}{\sqrt{Q}} < \Theta < \frac{\pi}{2}\frac{A+B}{\sqrt{P}}$

Il reste à déterminer les limites P, Q. Or le coefficient de z, dans l'expression qui doit être comprise entre P et Q, quand z est compris

entre α et β, est positif $(\alpha+\beta)$; donc cette quantité est croissante avec z. D'ailleurs z reste toujours compris entre $-l$ et $+l$; on aura donc des limites supérieure et inférieure en remplaçant dans cette expression z par $+l$, $-l$:

$$A^2 < z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta < B^2$$

On peut donc faire: $P = A^2$, $Q = B^2$; on aura pour $\hat{AOB}$ les limites: $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{A+B}{B} < \Theta < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{A+B}{A}$

Ces 2 limites sont supérieures à $\frac{\pi}{2}$, ce qui démontre le théorème.

— On peut obtenir des limites plus rapprochées, mais d'une forme moins simple, en remplaçant z par ses valeurs extrêmes α et β :

$$\beta^2+2\alpha\beta+l^2 < z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta < \alpha^2+2\alpha\beta+l^2$$

On a alors: $$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{A+B}{\sqrt{\beta^2+2\alpha\beta+l^2}} < \Theta < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{A+B}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta+l^2}}$$

Ces limites peuvent servir dans le cas où α et β sont très voisins. Il peut même arriver que α et β fussent égaux, c.à.d. que le point mobile décrivît rigoureusement un parallèle de la sphère. Pour cela, il faut évidemment que la vitesse initiale soit ~~parallèle~~ tangente du parallèle z_0 : alors une des 2 racines α, β, est égale à z_0 ; on écrira que l'autre racine est aussi égale à z_0, en annulant la dérivée $\varphi'(z)$, et on aura une équation de condition qui déterminera l'intensité de la vitesse initiale.

Supposons donc $\alpha = \beta$; on a: $A = l-\alpha$ $B = l+\alpha$: les 2 limites de Θ devenant égales, on a exactement $\hat{AOB}$ =

$$AOB = \frac{\pi l}{\sqrt{l^2+3\alpha^2}} = \frac{\pi l}{\sqrt{l^2+3z_0^2}}$$

Supposons les oscillations infiniment petites; le pendule s'écartant infiniment peu de Oz, α et β sont infiniment voisins de l: on a alors: $AOB = \frac{\pi l}{\sqrt{4l^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi l'angle AOB tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand les oscillations deviennent infiniment petites. — Nous allons retrouver ce résultat en étudiant directement les oscillations infiniment petites.

— Ecrivons les équations ordinaires du mouvement, où figure la réaction normale N (cosinus directeurs $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$, $\frac{z}{l}$):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l} \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{l} + mg$$

Dans les oscillations infiniment petites x et y sont infiniment petits; on négligera les infiniment petits de ordre supérieur au 1er:

$$z = \sqrt{l^2-(x^2+y^2)} = l\left(1-\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = l + \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{l^2} + \cdots\cdots$$

En négligeant x^2, y^2; $z = l$ aux inf. petits près du 2e ordre. Cela revient à identifier la surface de la sphère avec le plan tangent, et à étudier le mouvement du point dans ce plan

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \qquad \text{donc } N = mg \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y.$$

On a, dans le plan tangent, le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. Les intégrales sont:

$$x = A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$y = A'\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B'\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

On sait que le mobile décrit une ellipse ayant pour centre le pôle de la sphère. Il en résulte que l'angle AOB du rayon maximum

et du rayon minimum, est égal à $\frac{\pi}{2}$.

– Pour avoir N en général, il suffit de multiplier les 3 équations du mouvement respectivement par x, y, z et de les ajouter :

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right) = -Nl + mgz$$

Or l'équation de la sphère donne : $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0$

d'où : $x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0$

Donc $-mv^2 = -Nl + mgz$ Or $v^2 = 2gz + h$.

$-m(2gz+h) = -Nl + mgz$ $N = \frac{m}{l}(3gz+h)$

N est fonction linéaire de z, elle varie donc dans le même sens que z, ou en sens inverse de la hauteur. Elle peut devenir négative ; alors, si le point mobile est simplement posé à l'intérieur de la sphère, ou attaché au centre par un fil flexible, il tombera en chute libre – Si au contraire il ne peut quitter la sphère, la trajectoire se poursuivra conformément aux calculs, mais sa projection horizontale aura des inflexions aux points où N s'annule et change de signe. En effet, en ces points, la résultante des forces se réduit au poids : or on sait que le plan osculateur à la trajectoire contient cette résultante ; donc aux points où N = 0, le plan osculateur sera vertical, et comme la courbe le traverse, sa projection traversera sa tangente, c.à.d aura un point d'inflexion –

Mouvement relatif d'un point matériel

On a vu en cinématique que dans le mouvement d'un point M rapporté à un système S mobile lui-même dans l'espace absolu, on a entre les vitesses et accélérations de ce point les relations géométriques:

$$(V_A) = (V_R) + (V_E)$$

$$(J_A) = (J_R) + (J_E) + (J_c)$$

L'accélération complémentaire a une signification géométrique découverte par Coriolis. Soit ω la rotation instantanée du système S, qu'on peut toujours faire passer par le point mobile M; on a:

$$J_c = 2\omega . V_R . \sin(\omega, V_R)$$

Ce vecteur est appliqué en M et dirigé perpendiculairement au plan de ω et de V_R, du côté où tournerait V_R si la rotation ω s'effectuait autour du point M. On peut donc dire que J_c est le double du moment du vecteur $M\omega$ par rapport au point V_R, tant en grandeur qu'en direction.

Telle est la relation qui définit géométriquement le vecteur J_c dans l'espace. Analytiquement, on considère un système d'axes fixes $O_1 x_1 y_1 z_1$, et des axes mobiles $Oxyz$ invariablement liés au système de comparaison S, et auxquels on rapporte le mouvement relatif du point M. Le mouvement du système mobile dans le système fixe est défini par $x_0\, y_0\, z_0$, coordonnées de l'origine O, et les 9 cosinus directeurs, exprimés en fonctions du temps. x, y, z étant les coordonnées relatives du point M, les projections

de V_R sur les axes mobiles sont : $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.
Celles de J_R sur les mêmes axes sont : $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$.
D'autre part, les projections de ω sur les axes mobiles étant p, q, r, celles de J_c sur les mêmes axes sont :

$$2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) \qquad 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) \qquad 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right)$$

On suppose maintenant le point mobile sollicité par une force F ayant pour projections sur les axes fixes : X_1, Y_1, Z_1, et l'on demande le mouvement relatif du point M dans le système mobile $Oxyz$.

— Pour cela, on peut se servir des équations de Lagrange, qui définissent en général le mouvement d'un point dans un système quelconque de coordonnées fixes ou mobiles $q_1 q_2 q_3$. Ici, il s'agit de trouver le mouvement dans le système (xyz) dont le mouvement est connu, étant donné le mouvement dans le système fixe $(x_1 y_1 z_1)$. Les relations qui lient les nouvelles coordonnées aux anciennes sont les formules de transformation :

$$x_1 = x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z$$
$$y_1 = y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z$$
$$z_1 = z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z$$

où $x_0 y_0 z_0$ et les 9 cosinus sont des fonctions connues du temps : on a ainsi $x_1 y_1 z_1$ exprimés en fonction de x, y, z, t, et l'on peut appliquer la méthode de Lagrange. On calcule d'abord :

$$T = \frac{m}{2}\left(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2\right)$$

On tire x_1', y_1', z_1' des formules précédentes, et l'on exprime ainsi T

en fonction de x, y, z, x', y', z' et t. On écrit les équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Y \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z'}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Z$$

Il est facile de voir que les seconds membres de ces équations sont précisément les projections de la force F sur les axes mobiles — On sait en effet que pour avoir Q_1, on fait varier q_1 seul, et que le travail élémentaire de F dans le déplacement virtuel ainsi obtenu est $Q_1 \delta q_1$. Ici, le déplacement δx sera parallèle à Ox, et le travail virtuel de la force sera $X \delta x$: on voit que X est bien égal à la projection de F sur Ox.

On arriverait au même résultat analytiquement, en écrivant :

$$Q_1 = X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + Z_1 \frac{\partial \varpi}{\partial x} = \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1 = X.$$

— Mais on peut obtenir immédiatement les équations du mouvement relatif sans passer par les formules de Lagrange. Pour cela, il suffit de recourir à la formule qui exprime le théorème de Coriolis :
$$(J_A) = (J_R) + (J_E) + (J_c)$$
et de remarquer que, en vertu du théorème fondamental de la dynamique, J_A est la force divisée par la masse : $J_A = \frac{F}{m}$.

Exprimons analytiquement cette égalité géométrique ; nous aurons 3 égalités entre les projections sur les 3 axes mobiles :

$$\frac{X}{m} = \frac{d^2x}{dt^2} + J_{E_x} + J_{c_x} \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = X - mJ_{E_x} - mJ_{c_x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - mJ_{E_y} - mJ_{c_y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z - mJ_{E_z} - mJ_{c_z}$$

Telles sont les équations du mouvement relatif qui définissent $x\,y\,z$ en fonction de t. — X, Y, Z sont connus; J_c également: le seul terme compliqué est celui qui vient de J_E: il dépend du mouvement d'entraînement, et devra se calculer dans chaque cas particulier. — On le retrouve en développant les équations de Lagrange.

Pour pouvoir énoncer et se rappeler les équations du mouvement relatif on convient d'appeler force centrifuge le vecteur $-m\,J_E$, et force centrifuge composée le vecteur $-m\,J_c$. En considérant les axes $Oxyz$ comme fixes et les vecteurs $-m\,J_E$ et $-m\,J_c$ comme des forces appliquées au point mobile, on peut résumer les équations de la manière suivante: Ce sont les équations du mouvement absolu, dans le système (xyz) supposé fixe, du point M sollicité par la force donnée F, par la force centrifuge et par la force centrifuge composée. — Mais il ne faut pas oublier que ce sont des forces fictives, et non des forces réelles; ce sont des noms donnés pour la commodité du langage aux quantités analytiques qui figurent dans les équations.

Grâce à ce théorème, tout mouvement relatif peut se ramener à un mouvement absolu, et tout problème de mouvement relatif se traduit en un problème de mouvement absolu.

— On peut effectuer sur les équations du mouvement relatif la combinaison des forces vives (en multipliant par dx, dy, dz):

$$d\,\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - m\left[J_{E_x}\,dx + J_{E_y}\,dy + J_{E_z}\,dz\right]$$

Les termes provenant de J_c disparaissent dans cette combinaison parce que J_c est perpendiculaire à la vitesse relative (par définition).

le travail de cette force fictive est donc nul dans le mouvement supposé absolu:
$$J_{cx}\frac{dx}{dt} + J_{cy}\frac{dy}{dt} + J_{cz}\frac{dz}{dt} = 0$$
Ce fait résulte aussi des expressions analytiques de J_{cx}, J_{cy}, J_{cz}.
Appliquons les équations du mouvement relatif au cas particulier de l'équilibre relatif.

Un point mobile M est dit en équilibre relatif quand il est immobile dans le système mobile, c.à.d quand ses coordonnées relatives x, y, z sont fixes. Pour cela, il faut et il suffit que les forces F, $-mJ_E$, $-mJ_c$ se fassent équilibre dans le système Oxyz supposé fixe. Or, par hypothèse, V_R est nulle, donc J_c l'est aussi. On a donc les conditions:
$$X - mJ_{Ex} = 0$$
$$Y - mJ_{Ey} = 0$$
$$Z - mJ_{Ez} = 0$$
qui expriment que la force donnée est égale et opposée à la force centrifuge.

Application: Équilibre d'un point à la surface de la terre.
Pour rechercher les conditions de cet équilibre relatif, nous ne tiendrons compte que du mouvement de rotation de la terre sur elle-même, en supposant son centre fixe dans l'espace, ce qui n'altère pas sensiblement les résultats.

Soit l'axe de la terre PP', et Pω le vecteur qui représente sa rotation, dirigé du pôle N. vers le pôle S. Soit un point M à la surface de la terre; pour préciser la force qui le supporte, supposons-le suspendu par un fil attaché en C. Les forces qui agissent sur lui sont: la tension T

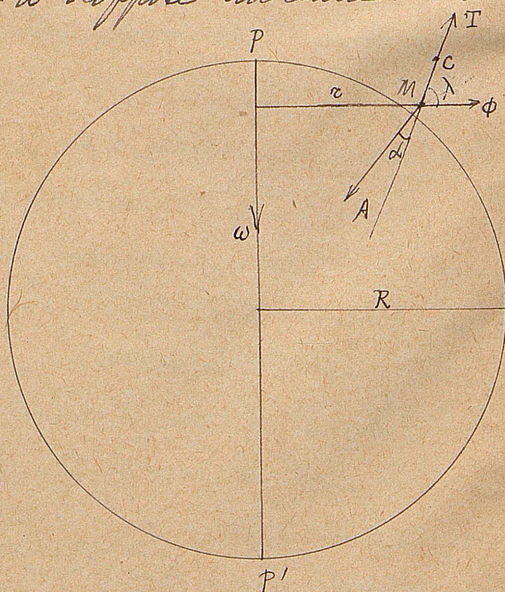
du fil et l'attraction A de la terre. Il n'y a pas d'autre force appliquée au point M; mais ces 2 forces ne se font pas équilibre, puisque le point M, au lieu de décrire une droite, tourne autour de PP' avec une vitesse angulaire: $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2}$ (par seconde)

D'autre part, la tension du fil est ce que nous avons appelé (1er cahier, page 62) le *poids* du point matériel: $T = mg$.

Pour écrire les équations de l'équilibre relatif, il faut exprimer qu'il y a équilibre entre les forces directement appliquées et la force centrifuge. Calculons celle-ci, c.à.d. J_E. Le point M, étant immobile par rapport à la terre, décrit un cercle ayant pour axe PP' et pour rayon r, avec la vitesse uniforme ω. On sait que dans ce cas l'accélération est normale et égale à: $\frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$.

La force centrifuge est donc $\Phi = -m\omega^2 r$

et elle est dirigée suivant le rayon à l'opposé du centre. La terre étant supposée fixe, les 3 forces T, A, Φ se font équilibre.



Écrivons que chacune d'elles est proportionnelle au sinus des 2 autres. L'angle $CM\Phi$ est la latitude λ du lieu = appelons α l'angle de MA avec la verticale CM prolongée; c'est ce qu'on nomme déviation de la verticale. On a donc:

$$\frac{mg}{\sin(\lambda-\alpha)} = \frac{m\omega^2 r}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\lambda}$$

Telles sont les 2 équations de l'équilibre : elles donnent A et α en fonction des quantités connues m, g, ω, r, λ, donnés par l'observation.

On en tire d'abord : $A \sin\alpha = m\omega^2 r \sin\lambda$

Ecrivons que la somme des 3 projections sur la verticale MC est nulle :

$$A\cos\alpha = mg + m\omega^2 r \cos\lambda$$

Ces 2 équations permettent de calculer A et $tg\alpha$.

On peut écrire la seconde : $mg = A\cos\alpha - m\omega^2 r\cos\lambda$

C'est la formule du poids en chaque lieu de la surface de la terre.

A l'équateur, on a : $\lambda = 0$, donc $\alpha = 0$

La déviation du pendule est nulle ; on a : $mg_0 = A_0 - m\omega^2 R$

R étant le rayon terrestre équatorial ; on peut écrire :

$$mg_0 = A_0\left(1 - \frac{m\omega^2 R}{A_0}\right)$$

Tel est le poids d'un corps à l'équateur, en fraction de l'attraction.

On trouve que : $\frac{m\omega^2 R}{A_0} = \frac{1}{289}$ $\quad mg_0 = \frac{288}{289} A_0$

L'intensité de la pesanteur est donc à l'équateur, les $\frac{288}{289}$ de l'attraction terrestre. On peut se rappeler cette formule en remarquant que si la terre tournait 17 fois plus vite, la pesanteur serait nulle à l'équateur ; $17^2 = 289$ $\quad \frac{m(17\omega)^2 R}{A_0} = 1.$

Au pôle, on a : $r = 0$, $\alpha = 0$; donc : $mg = A$

La pesanteur est égale à l'attraction ; tout se passe (dans l'équilibre) comme si la terre ne tournait pas.

Pour étudier la variation de la pesanteur et de la déviation du pendule

avec la latitude, nous supposerons la terre sphérique et composée de couches concentriques homogènes, de sorte que l'attraction soit partout la même et dirigée vers le centre ; alors : $OM = R$.

$$r = R\cos(\lambda - \alpha) \qquad A\sin\alpha = m\omega^2 R \sin\lambda \cos(\lambda - \alpha)$$

α étant très-petit, on peut négliger les termes du 2e ordre en α, c.à.d. réduire $\underline{\cos\alpha}$ à $\underline{1}$, et $\underline{\sin\alpha}$ à $\underline{\alpha}$. En négligeant aussi $\omega^2\alpha$, on peut réduire $\cos(\lambda-\alpha)$ à $\cos\lambda$.

Grâce à ces approximations, on trouve :

$$\alpha = \frac{m\omega^2 R}{A} \sin\lambda\cos\lambda = \frac{\sin\lambda\cos\lambda}{289} = \frac{\sin 2\lambda}{2 \cdot 289}$$

Cette formule montre immédiatement que la déviation de la verticale a son maximum à la latitude de 45° ; $\lambda = \frac{\pi}{4}$, et qu'elle s'annule à l'équateur et au pôle.

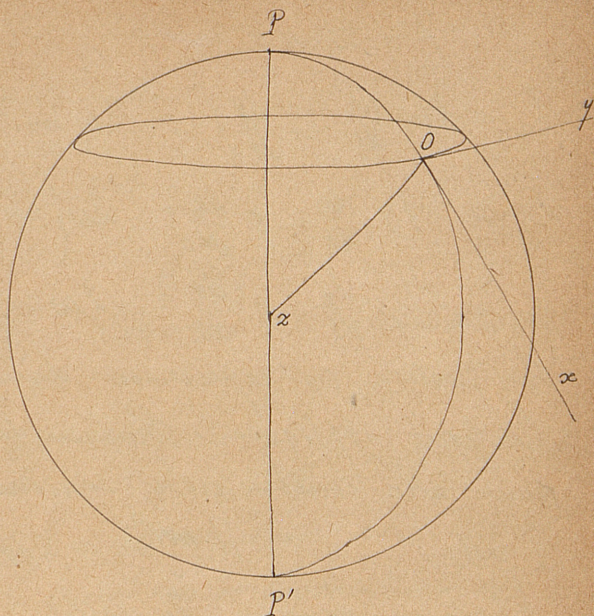
On trouve, avec la même approximation :

$$mg = A - m\omega^2 R\cos^2\lambda = A\left(1 - \frac{\cos^2\lambda}{289}\right)$$

Cette formule donne la diminution du poids due à la rotation : $\frac{\cos^2\lambda}{289}$. On voit qu'elle est $\frac{1}{289}$ à l'équateur, 0 au pôle.

— Équations du mouvement relatif d'un p. à la surface de la terre.
Soit un lieu O, de latitude λ, à la surface de la terre ; menons par ce point un système d'axes mobiles invariablement liés à la terre : prenons pour Oz la verticale vers le bas, pour Oy la tangente au parallèle vers l'Est, pour Ox la tangente au méridien

vers le Sud. Soit M un point mobile dans ce système, situé à la surface de la terre, et par conséquent très voisin de O. Il est soumis à l'attraction A, et à d'autres forces directement appliquées qui ont pour résultante F (X Y Z.) Pour avoir les équations du mouvement relatif, on regarde les axes Oxyz comme fixes en appliquant au point M les forces fictives Φ et Φ'.



Or, on vient de voir que: $(\Phi) + (A) = mg$ $\quad \Phi' = -m J_c$.

Les équations du mouvement seront donc:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - m J_{cx}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - m J_{cy}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + mg - m J_{cz}$$

La force centrifuge $(-m J_E)$ est ainsi englobée dans le poids (dont les projections sont 0, 0, mg) force fictive, mais comme

Calculons les projections p, q, r de la rotation ω sur les 3 axes mobiles. Ce vecteur est dans le plan du méridien xOz; donc $q = 0$. Remarquons que $x\hat{O}\omega = \lambda$ car c'est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. On a donc:

$$p = \omega \cos\lambda \qquad q = 0 \qquad r = \omega \sin\lambda$$

$$J_{cx} = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) = -2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$J_{cy} = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) = 2\omega\left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right)$$

$$J_{cz} = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) = 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}$$

On portera ces expressions dans les équations du mouvement relatif.
On peut appliquer le théorème des forces vives: on sait que J_c disparaît dans cette combinaison comme il serait aisé de le vérifier par le calcul.
Il reste: $\quad d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz + mgdz$

S'il y a une fonction de forces, $U(x, y, z)$ on a immédiatement l'intégrale des forces vives: $\quad \frac{mv^2}{2} = U + gz + h$

Cette intégrale première a la même forme que si la terre était immobile. Cela tient à ce que Φ' (force centrifuge composée) disparaît, et que Φ (force centrifuge) est comprise dans le poids.

Applications. Chute libre d'un point pesant sans vitesse initiale.
Dans ce cas particulier, $F(XYZ)$ est nulle, et l'on a les équations: (le corps est abandonné au p. O.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}$$

On peut appliquer le théorème des forces vives, qui fait disparaître la force centrifuge composée; $\quad d\frac{mv^2}{2} = gdz \qquad v^2 = 2gz + h$

On a la même intégrale des forces vives que dans l'hypothèse où la

terre serait fixe. — Intégrons la 1e équation du mouvement :

$\frac{dx}{dt} = 2\omega y \sin\lambda$ Constante nulle car $y_0 = 0$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$

Intégrons la 3e ; $\frac{dz}{dt} = gt - 2\omega y \cos\lambda$

Constante nulle parce que : $y_0 = 0$ $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0$.

Portons ces expressions de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dans la 2e équation ; elle ne contiendra plus que y :

$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left[2\omega y - gt\cos\lambda\right]$ $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 y = 2\omega g t \cos\lambda$

On a une équation linéaire à coefficients constants avec second membre, qu'on peut intégrer par la méthode ordinaire. Mais comme ω est très-petit, on peut procéder par approximation en considérant ω comme un infiniment petit du 1er ordre ; on négligera donc ω^2 ; $\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega g t \cos\lambda$

Intégrons : $\frac{dy}{dt} = \omega g t^2 \cos\lambda$ $y = \omega g \cos\lambda \cdot \frac{t^3}{3}$

Constante nulle car pour $t = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $y = 0$.

On voit que y est un infiniment petit de l'ordre de ω.

Portons sa valeur dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$:

$\frac{dx}{dt} = 2\omega \sin\lambda \cdot \omega g \cos\lambda \cdot \frac{t^3}{3} = 2\omega^2 g \sin\lambda \cos\lambda \frac{t^3}{3}$

Puisque nous négligeons ω^2, la valeur de $\frac{dx}{dt}$ serait 0, au degré d'approximation choisi. On aurait $x = C^{te} = 0$, car $x = 0$ à l'origine du mouvement.

En portant la valeur de y dans l'expression de $\frac{dz}{dt}$, on aurait :

$$\frac{dz}{dt} = gt \quad \text{au même degré d'approximation; d'où:}$$

$$z = \frac{gt^2}{2} \quad \text{Constante nulle car } \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

On a donc les formules suivantes, vraies aux infiniment petits du 2e ordre près: $x = 0 \qquad y = \omega g \cos\lambda \frac{t^3}{3} \qquad z = \frac{gt^2}{2}$

L'expression de y seule diffère de celle qui correspond à la chute absolue. — Si l'on avait calculé les valeurs exactes de x, y, z, et qu'on les eût développées suivant les puissances croissantes de ω, les termes finis ou du 1er degré en ω seraient ceux qui figurent dans les formules précédentes. Si l'on prenait les termes en ω^2 pour avoir une approximation supérieure, x prendrait une valeur positive extrêmement petite, inaccessible à l'expérience. Comme y varie avec t et est de l'ordre de ω, le point ne tombe pas verticalement, mais est légèrement dévié vers l'Est. Il est facile de voir qu'il décrit une parabole semi-cubique, dont l'équation est:

$$y = \frac{\omega g \cos\lambda}{3}\left(\frac{2z}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Cette déviation a pu être constatée aux mines de Freiberg en Silésie. Dans un puits vertical de 158 mètres de hauteur, la déviation du corps vers l'E. a été de $0^m,0283$. La déviation, calculée par les formules précédentes, est $0^m,0276$. L'écart de ces 2 nombres est insignifiant et de l'ordre des erreurs d'expérience.

— Mouvement d'un point sur un plan horizontal à la surface de la terre.

Prenons le plan Oxy pour ce plan horizontal. Les forces qui agissent

sur le corps sont ~~la attraction R de la terre~~ son poids mg et la réaction du plan, supposé normal (pas de frottement). Donc: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -N$.
Les équations du mouvement relatif dans le plan des xy sont:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left[\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right]$$

Or $\frac{dz}{dt} = 0$, puisque le point se meut dans le plan Oxy — $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ —
La 3e équation donne la réaction normale, son 1er membre étant nul:

$$0 = mg - N - 2m\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}$$

d'où: $$N = -mg - 2m\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}$$

On voit que la réaction normale n'est pas rigoureusement égale (et contraire) au poids, comme cela aurait lieu si la terre était fixe; elle est plus grande ou moins grande que le poids suivant le signe de $\frac{dy}{dt}$, c.à.d. suivant que le point mobile avance vers l'O. ou vers l'Est. — L'intégrale des forces vives montre que la vitesse du mobile est constante, parce que l'accélération de Coriolis disparaît:

$$d\frac{v^2}{2} = 0 \qquad v = C^{te}$$

Pour obtenir la trajectoire, intégrons les 2 équations du mouvement:

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega y \sin\lambda + a \qquad a = \text{vitesse initiale suivant } Ox \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega x \sin\lambda + b \qquad b = \text{vit. init. suivant } Oy \left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Formons une combinaison intégrable de ces 2 équations:

$$2\omega \sin\lambda (x dx + y dy) + a dy - b dx = 0$$ d'où:

$$\omega \sin\lambda (x^2 + y^2) + ay - bx = 0$$

Constante nulle, car pour $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

La trajectoire est un cercle passant par l'origine et de rayon très grand : l'ordonnée du centre est : $\frac{-a}{2\omega \sin\lambda}$ Son abscisse : $\frac{b}{2\omega \sin\lambda}$

Il ne faut pas oublier que les formules ne s'appliquent que dans la mesure où le plan horizontal se confond avec la surface terrestre, c.à.d. dans le voisinage immédiat du point O.

— Pendule de Foucault. Soit un pendule sphérique attaché en O, de longueur l, formé par un point pesant M ; on demande le mouvement relatif de ce point, en tenant compte de la rotation de la terre.

— Le point M est sollicité par son poids et par la réaction normale de la sphère (tension du fil) N, qui a pour projections sur les axes $-N\frac{x}{l}$, $-N\frac{y}{l}$, $-N\frac{z}{l}$, puisqu'elle est dirigée suivant le rayon (et vers le centre O).

Les équations du mouvement relatif seront donc :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l} + 2m\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l} - 2m\omega\left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{l} + mg - 2m\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}$$

Joignons-y l'équation de la surface : $x^2+y^2+z^2-l^2=0$.

On ne peut intégrer ces équations que par approximation. On peut remarquer que, en vertu de l'intégrale des forces vives, la vitesse du point a la même formule que si la terre était immobile :

$d\frac{mv^2}{2} = mg\,dz$ $\quad v^2 = 2gz + h = 2gz + v_0^2 - 2gz_0$ -

Si le pendule s'écarte très peu de la verticale Oz, x, y seront très petits ; on pourra les assimiler à des infiniments petits du 1er ordre et on négligera leurs carrés. z sera alors égal à l, à des infiniment

petits p(uissances) d'ordre supérieur au 1er. $z = l\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}}$ $z = l$.
v sera infiniment petite comme v_0, puisque $z = z_0$. Donc $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ seront infiniment petits du 1er ordre. Quant à $\frac{dz}{dt}$, elle sera nulle, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.
La dernière équation donne alors, avec ces approximations:

$$0 = -N + mg - 2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}$$

d'où:

$$N = mg - 2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}$$

Nous venons de voir que c'est la formule rigoureuse pour un plan horizontal. Elle ne s'applique à la sphère qu'autant qu'elle se confond avec son plan tangent. — Le produit $\omega\frac{dy}{dt}$ peut être négligé, étant du 2e ordre; on a donc au degré d'approximation choisi: $N = mg$. Posons: $\omega' = \omega\sin\lambda$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x + 2\omega'\frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y - 2\omega'\frac{dx}{dt}$$

Ces équations définissent le mouvement du point M dans le plan tangent confondu avec la sphère. Ce sont 2 équations linéaires à coefficients constants que l'on pourrait intégrer exactement — Mais on peut en former 2 combinaisons aisément intégrables = d'abord, l'équation des forces vives:

$$d\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{l}(xdx + ydy) \qquad v^2 = -\frac{g}{l}r^2 + h$$

en posant: $r = \sqrt{x^2+y^2}$ rayon vecteur dans le plan Oxy —
Puis la combinaison des moments:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega'\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

qui donne en intégrant:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = -\omega' r^2 + C \quad \text{ou} \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = -\omega' r^2 + C$$

en coordonnées polaires; C est un infiniment petit du 2e ordre comme r^2. On a donc, en coordonnées polaires, les 2 équations:

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = -\frac{g}{l} r^2 + h \qquad r^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega'\right) = C.$$

On peut les interpréter immédiatement dans un cas particulier simple. Supposons que le pendule étant en équilibre relatif, c.à.d. coïncidant avec la verticale, on lui donne une petite impulsion. On a alors:

$C = 0$ d'où: $\frac{d\theta}{dt} + \omega' = 0$ car $r^2 \gtrless 0$.

En intégrant: $\theta = -\omega' t + \theta_0$

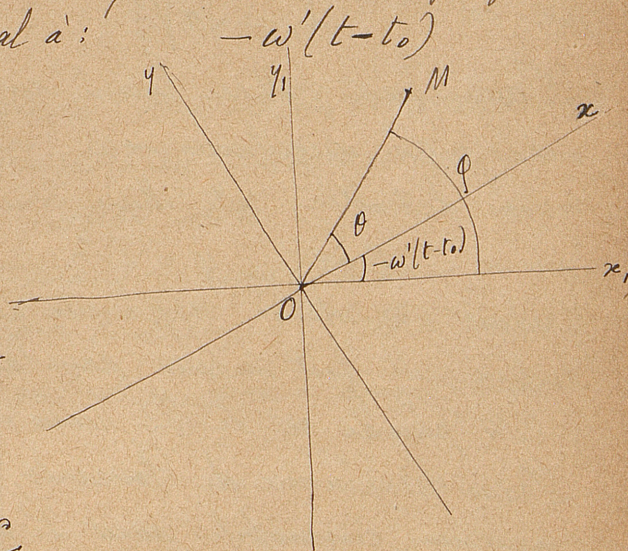
Cette équation montre que dans le plan horizontal, l'angle polaire θ varie proportionnellement au temps, c.à.d. que le plan d'oscillation zOM tourne uniformément autour de Oz avec la vitesse angulaire $-\omega'$; il fait un tour entier en: $\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \frac{24^h}{\sin\lambda}$

Au pôle, le phénomène est presque évident: nous savons que le pendule simple ~~reste~~ oscille dans un plan fixe; comme le point d'attache est fixe, le plan d'oscillation reste fixe pendant que la terre tourne au-dessous du pendule; donc ce plan semble faire un tour en 24 heures en sens inverse de la rotation de la terre. La formule précédente montre qu'en un point quelconque de la terre, tout se passe comme si, le point O étant fixe, la terre tournait autour de la verticale du lieu (Oz) avec une vitesse angulaire $\omega \sin\lambda$.

— Revenons au cas général. La 2e équation du mouvement du point dans le plan Oxy est analogue à l'équation bien connue des aires. Pour la ramener à cette forme posons:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} + \omega' \qquad \text{d'où} : \qquad \varphi = \theta + \omega'(t - t_0)$$

Menons dans le plan horizontal un système d'axes Ox_1y_1 faisant avec les axes Oxy un angle égal à : $-\omega'(t-t_0)$



L'angle MOx_1 sera alors égal à φ : c'est l'angle polaire du p. M dans le système mobile, qui tourne (par rapport au système Oxy supposé fixe) autour de O avec la vitesse angulaire constante $-\omega'$. On voit que dans le système mobile Ox_1y_1 le mouvement obéit à la loi des aires : $r^2\frac{d\varphi}{dt} = C$

L'autre équation se simplifie également :

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega'\right)^2 = -\frac{g}{l}r^2 + h$$

Or le produit (rectangle) : $-2\omega' r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ ~~est constant~~, en vertu de la loi des aires ; on a donc, h' étant ~~une nouvelle constante~~ (où rentre aussi : $r^2\omega'^2$) :

$$\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} = -\frac{g}{l}r^2 + h'$$

Cette équation est celle du mouvement d'un point attiré par le centre O proportionnellement à la distance dans le plan Ox_1y_1 : en effet, si l'on étudie la force centrale : $-m\frac{g}{l}r$, on trouve les 2 équations précédentes, dont l'une exprime la loi des aires, et l'autre traduit le théorème des forces vives. On sait

que la trajectoire d'un point soumis à cette force est une ellipse ayant O pour centre, et fixe dans le plan Ox_1y_1 — La durée d'une révolution est : $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

D'autre part l'ellipse tourne autour de O, dans le système fixe Oxy, avec la vitesse angulaire $-\omega'$. Dans le cas particulier que nous venons de traiter, cette ellipse se réduisait à une ligne droite, parce que : $C = 0$, $\varphi = C^{te}$ — Ainsi la rotation de la terre produit une rotation apparente de l'ellipse autour de la verticale du lieu ; elle fait un tour dans la période : $T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{24^h}{\sin\lambda}$

Cette période est de 32 heures environ à Paris.

Dans l'expérience de Foucault, le pendule, écarté de la verticale et maintenu immobile, avait été abandonné sans vitesse initiale.

On a dans ce cas : $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0$ $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0$

La position initiale est un sommet de l'ellipse ; car la 1[re] formule montre que la tangente à l'ellipse est perpendiculaire au rayon vecteur initial : donc : $OA = r_0 = a$ demi-axe de l'ellipse.

On peut déterminer C par les conditions initiales ; on a en général :

$r^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega'\right) = C$ donc : $C = a^2\omega'$

Telle est la constante des aires engendrées par le p. M dans le plan mobile Ox_1y_1. On peut tirer de cette formule le rapport des axes ; en effet, $C = \frac{2\pi ab}{T_1}$ d'où : $2\pi ab = a^2\omega' T_1$

$\frac{b}{a} = \frac{T_1\omega'}{2\pi} = \frac{T_1}{T}$

Dans l'expérience du Panthéon, on avait : $T_1 = 16^{\text{secondes}}$ —

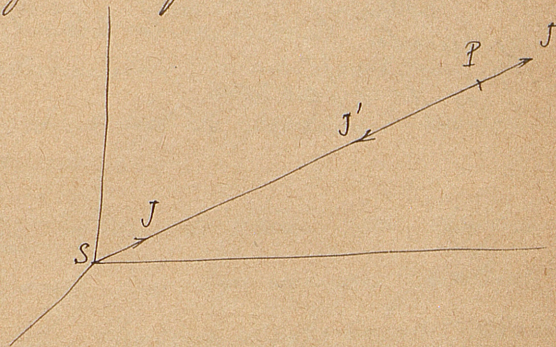
Par conséquent : $\frac{b}{a} = \frac{16}{32 . 60^2} = \frac{1}{7200}$

On voit que le petit axe de l'ellipse est imperceptible ; le pendule passe très près de la verticale.

— Remarque générale. Si le système d'axes mobile est animé d'un mouvement de translation par rapport au système fixe, la force centrifuge composée est nulle, puisque alors : $\omega = 0$.

Le théorème du mouvement relatif se simplifie dans ce cas : il suffit de tenir compte de la force centrifuge : $\Phi = -mJ_E$.

Application : Mouvement relatif d'une planète autour du soleil.



Menons par le centre S du soleil des axes de directions fixes : le système de comparaison sera animé d'un mouvement de translation. Cherchons le mouvement relatif de la planète P dans ce système. — On a :

$F = F' = \frac{fMm}{r^2}$ pour l'attraction réciproque de S et de P, f étant l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance ; M, m les masses du soleil et de la planète. L'accélération du soleil sera : $J = \frac{F}{M} = \frac{fm}{r^2}$ dirigée vers P.

L'accélération de la planète sera : $J' = \frac{F'}{m} = \frac{fM}{r^2}$ dirigée vers S. On peut regarder les axes comme fixes, en ajoutant à P la force centrifuge. Or l'accélération d'entraînement de P est l'accélération de S, puisque les axes éprouvent une translation.

La force centrifuge est donc mJ appliquée en P et dirigée en sens contraire, c.à.d. vers S : $\Phi = mJ = \frac{fm^2}{r^2}$.

Les axes étant supposés fixes, la planète sera soumise aux 2 forces $f\frac{Mm}{r^2}$ et $\frac{fm^2}{r^2}$ dirigées toutes deux vers S ; elles s'ajoutent, et le point P se meut dans le système de comparaison comme s'il était soumis à la seule force centrale :

$$f\frac{Mm}{r^2} + \frac{fm^2}{r^2} = \frac{f(M+m)m}{r^2}$$

On retrouve ainsi le résultat connu. La planète se meut par rapport au soleil comme si, le soleil étant fixe, sa masse était augmentée de celle de la planète, l'attraction ayant lieu suivant la loi de Newton.

Dynamique des systèmes.

Moments d'inertie.

On a vu, en statique, le rôle important que jouent les quantités de la forme : Σmx Σmy Σmz
qui figurent dans les équations du centre de gravité d'un système.
On considère, dans la dynamique des systèmes, des sommes analogues, du second degré en x, y, z :

Σmx^2; Σmy^2; Σmz^2, Σmyz, Σmzx, Σmxy.

Ces quantités, dont on fait constamment usage, ont reçu des noms que nous allons définir, et jouissent de propriétés importantes que nous allons démontrer.

On appelle <u>moment d'inertie</u> d'un système par rapport à un plan, à un axe ou à un point, la somme des produits formés en multipliant la masse de chacun de ses points par sa distance au plan, à l'axe ou au point : Σmd^2.

En mécanique, on n'a à considérer que les moments d'inertie par rapport à des axes, mais on a souvent à les transformer en moments d'inertie par rapport à des plans ou à des points ; cela se fait au moyen des équivalences que nous allons établir.

Soit un système d'axes rectangulaires : $Oxyz$ et un système matériel donné. Son moment d'inertie par rapport au plan des <u>xy</u> sera évidemment : Σmz^2

De même, ses moments d'inertie par rapport aux plans Oyz, Oxz sont : Σmx^2 Σmy^2

Son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est (les distances se projetant en vraie grandeur sur Oxy) : $\Sigma m(x^2+y^2)$

De même, ses moments d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy sont : $\Sigma m(y^2+z^2)$ $\Sigma m(z^2+x^2)$

Enfin son moment d'inertie par rapport à l'origine est (puisque $\overline{OM}^2 = x^2+y^2+z^2$) : $\Sigma m(x^2+y^2+z^2)$

On en conclut immédiatement les théorèmes suivants :

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal à la somme de ses moments d'inertie par rapport à 2 plans rectangulaires passant par cet axe.

Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à 3 plans orthogonaux passant par ce point, ou à la somme des moments d'inertie par rapport à un plan et à un axe perpendiculaire passant par ce point, ou à la demi somme des moments d'inertie par rapport à 3 axes rectangulaires passant par ce point.

Soit A le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox, B celui par rapport à Oy, C celui par rapport à Oz. Chacun d'eux est plus petit que la somme des 2 autres ; en effet :

$$\Sigma m(y^2+z^2) < \Sigma m(x^2+y^2) + \Sigma m(z^2+x^2) = \Sigma m(y^2+z^2+2x^2)$$

Ces 3 nombres A, B, C vérifient donc les inégalités :

$$A < B+C \qquad B < C+A \qquad C < A+B$$

c. à d. qu'avec 3 droites ayant pour longueurs A, B, C, on peut construire

un triangle. — Il n'y a d'exception que dans le cas particulier où le système est entièrement situé dans le plan des yz; on a alors:

$\Sigma mx^2 = 0$, d'où: $A = B + C$

Les sommes: Σmyz, Σmzx, Σmxy

se ramènent aisément à des moments d'inertie. Considérons le plan bissecteur P du dièdre Oz, et le plan P' bissecteur du dièdre complémentaire; leurs équations sont:

$$x - y = 0 \qquad x + y = 0$$

Soient δ, δ' les distances d'un p. M à ces 2 plans P, P':

$$\delta = \pm \frac{x-y}{\sqrt{2}} \qquad \delta' = \pm \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

Or: $xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$ $\quad \Sigma mxy = \frac{1}{2}\left[\Sigma m\delta'^2 - \Sigma m\delta^2\right]$

Ainsi cette somme est égale à la demi-différence des moments d'inertie par rapport aux 2 plans P, P' bissecteurs des dièdres des 2 plans: xOz, yOz.

Quand le système matériel est un corps continu, les moments d'inertie se calculent par des intégrales triples étendues au volume de ce corps. Nous allons évaluer les moments d'inertie des corps les plus simples et les plus usuels.

— Moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène par rapport à son axe.

Soit r le rayon de base, h la hauteur; ρ la densité, constante. Calculons l'accroissement infiniment petit $d\mu$ du moment d'inertie correspondant à un accroissement infiniment petit du rayon.

Le volume du cylindre est : $\pi r^2 h$ et sa masse : $M = \pi r^2 h \rho$.
Si r croît de dr, on a : $dM = 2\pi r h \rho \, dr$
Telle est la masse de la couche cylindrique dont le solide s'est accru.
$d\mu$ est le moment d'inertie de cette couche par rapport à l'axe.
Or tous ses points sont à la distance r de l'axe ; on a donc :

$$d\mu = dM \cdot r^2 = 2\pi r^3 h \rho \, dr$$

Intégrons :

$$\mu = \pi h \rho \frac{r^4}{2}$$

Constante nulle, car pour $r = 0$, $\mu = 0$.

Exprimons μ en fonction de M : $\mu = M \frac{r^2}{2}$

Il y a intérêt, pour l'homogénéité des formules, à mettre le moment d'inertie sous la forme Mk^2 ; M étant la masse totale du système (Σm) et k une longueur. On trouve ici : $K = \frac{r}{\sqrt{2}}$.
Cette longueur s'appelle rayon de giration du système autour de l'axe considéré : c'est la distance à laquelle il faudrait placer un point matériel de masse M pour que son moment d'inertie fût égal à celui du système proposé.

— Le moment d'inertie d'un solide de révolution homogène par rapport à son axe se déduit aisément de celui du cylindre.
Soit l'équation de la surface de révolution : $z = \varphi(r)$
et considérons le volume limité par cette surface et les 2 plans parallèles : $z = z_0$, $z = z_1$. — Soit ρ la densité, constante.
On décompose le volume en tranches infiniment minces dans le sens de la hauteur ; chaque tranche peut être assimilée à un cylindre ; son moment d'inertie est donc : $\frac{\pi \rho}{2} r^4 dz$
dz étant sa hauteur. Le moment d'inertie du volume total est

Rayon de giration d'une barre $(2l)$ autour de son milieu : $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

l'intégrale : $\frac{\pi\rho}{2}\int_{z_0}^{z} r^4 dz$ r fonction de z.

Exemples : Moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre.

L'équation de la surface est : $z^2 + r^2 = R^2$

Le moment d'inertie est : $\frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{+R}(R^2 - z^2)^2 dz$.

Intégrale indéfinie : $\frac{\pi\rho}{2}\left[R^4 z - 2R^2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]$

Intégrale prise de $-R$ à $+R$ (le centre étant pris pour origine) :

$\pi\rho R^5\left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right] = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$ Exprimons μ par M :

$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ $\mu = M\frac{2}{5}R^2$ $K = R\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un plan diamétral est la moitié de μ, c.à.d. $\frac{4}{15}\pi\rho R^5 = M\frac{R^2}{5}$.

— Moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène.

Soit l'équation de l'ellipsoïde : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

Son moment d'inertie par rapport au plan des xy est : Σmz^2.

La masse de chaque élément de volume étant $\rho dx dy dz$,

on a : $\mu = \iiint \rho dx dy dz.\ z^2$

intégrale triple étendue à tous les points de l'ellipsoïde, c.à.d. à tous les systèmes (x, y, z) qui vérifient l'inégalité : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$.

Ramenons l'ellipsoïde à une sphère par le changement de variables :

$x = ax'$ $y = by'$ $z = cz'$.

L'intégrale devient : $\mu = abc^3 \rho \iiint z'^2 dx'dy'dz'$

les nouvelles variables étant prises dans les limites définies par l'inégalité : $x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 < 0$

c.à.d. que l'intégrale est étendue au volume de la sphère de rayon 1. On sait que son moment d'inertie par rapport au plan des $x'y'$ est : $\frac{4}{15} \pi \rho$. Le moment d'inertie de l'ellipsoïde par rapport au plan des xy est donc : $\frac{4}{15} \pi \rho abc^3$

Or : $M = \frac{4}{3} \pi \rho abc$ Donc : $\mu = M \frac{c^2}{5}$.

On trouverait de même que les moments d'inertie par rapport aux plans des yz et des xz sont : $M \frac{a^2}{5}$, $M \frac{b^2}{5}$.

Les moments d'inertie par rapport aux 3 axes Ox, Oy, Oz sont :

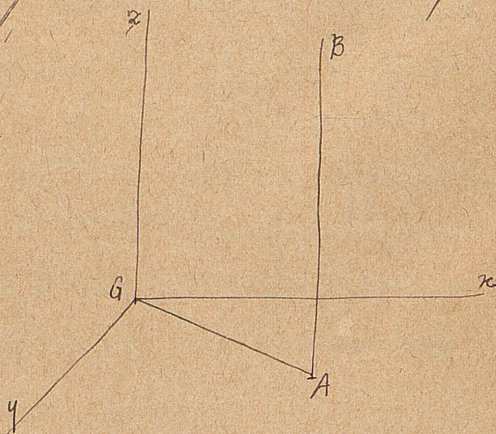
$M \frac{b^2+c^2}{5}$ $M \frac{c^2+a^2}{5}$ $M \frac{a^2+b^2}{5}$

Enfin le moment d'inertie par rapport à l'origine O est :

$$M \frac{a^2+b^2+c^2}{5}.$$

– Nous allons maintenant étudier la variation du moment d'inertie d'un système par rapport à des axes parallèles. – Cette étude repose sur le théorème suivant :

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport au centre de gravité du système, plus le produit de la masse totale par le carré de la distance des 2 axes.



Soit AB l'axe considéré ; menons par le centre de gravité l'axe Gz parallèle à AB. Le moment d'inertie du système par rapport à AB est : Σmr^2. Soient a, b les coordonnées du p. A où l'axe AB perce le plan des xy : $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

$\Sigma mr^2 = \Sigma m\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right] = \Sigma m(x^2+y^2) + \Sigma m(a^2+b^2) + 2\Sigma m(ax+by)$

Le dernier terme est nul, car les axes Ox Oy passent par G ; on a : $\Sigma mx = 0$ $\Sigma my = 0$. D'autre part :

$\Sigma m(a^2+b^2) = (a^2+b^2)\Sigma m = M(a^2+b^2)$ Il reste donc :

$\Sigma mr^2 = \Sigma m(x^2+y^2) + M(a^2+b^2)$ c.q.f.d.

Il en résulte que si l'on déplace l'axe AB parallèlement à lui-même, le moment d'inertie a une partie constante, $\Sigma m(x^2+y^2)$ et une partie qui varie proportionnellement au carré de AG. L'axe pour lequel le moment d'inertie est minimum (parmi tous les axes parallèles) est donc Gz — Le lieu des axes pour lesquels le moment d'inertie a une valeur constante (supérieure à $\Sigma m(x^2+y^2)$) est un cylindre de révolution d'axe Gz.

— Cherchons maintenant la variation du moment d'inertie d'un système par rapport à des axes passant par un même point fixe. Soit l'axe OΔ passant par l'origine, et défini par ses 3 cosinus directeurs α β γ. Soit M(x y z) un point du système, MP = r sa distance à OΔ. Le moment d'inertie du système est Σmr^2 ; calculons donc MP. Or $OP = \alpha x + \beta y + \gamma z$

$r^2 = OM^2 - OP^2 = x^2+y^2+z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$

$r^2 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$

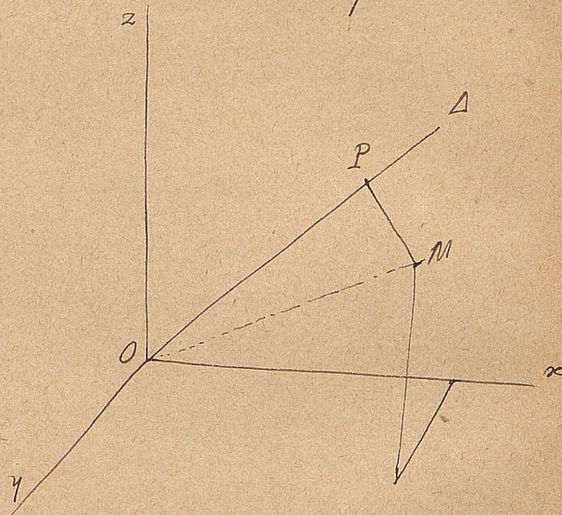
$$r^2 = \alpha^2(y^2+z^2) + \beta^2(z^2+x^2) + \gamma^2(x^2+y^2) - 2\beta\gamma\, yz - 2\gamma\alpha\, zx - 2\alpha\beta\, xy$$

$$\Sigma mr^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

en posant : $A = \Sigma m(y^2+z^2)$ moment d'inertie par rapport à Ox

et de même : $B = \Sigma m(z^2+x^2)$ $C = \Sigma m(x^2+y^2)$

$D = \Sigma myz$ $E = \Sigma mzx$ $F = \Sigma mxy$



Le moment d'inertie dépend donc des 3 cosinus directeurs de l'axe variable, et des 6 constantes A B C D E F, qu'on calculera, dans le cas d'un corps continu, au moyen d'intégrales triples. Pour étudier la variation de ce moment d'inertie, on le transforme pour le ramener à une expression dont la discussion soit connue.

Portons sur OΔ une longueur : $OI = \dfrac{1}{\sqrt{\Sigma mr^2}}$

Les coordonnées du point I sont :

$x = \alpha\, \overline{OI}$ $y = \beta\, \overline{OI}$ $z = \gamma\, \overline{OI}$

$$\Sigma mr^2 = \frac{1}{\overline{OI}^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

d'où ; $1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy$

c'est l'équation d'une surface du 2e ordre ayant l'origine pour centre ; or OI ne peut devenir infini, en général ; donc le lieu du point I est un ellipsoïde ayant pour centre O : on l'appelle ellipsoïde d'inertie relatif au point O.

OI ne devient infini que si $\Sigma m r^2 = 0$,

c.à.d. si tous les points du système se trouvaient sur un certain axe $O\Delta$; le point I serait à l'infini dans cette unique direction, son lieu serait donc un cylindre elliptique.

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque issu de O varie donc en raison inverse du carré du rayon vecteur intercepté sur cet axe par l'ellipsoïde d'inertie : $\frac{1}{OI^2}$

Le plus petit moment d'inertie correspond au grand axe, le plus grand au petit axe. Le lieu des axes par rapport auxquels le moment d'inertie a la même valeur est le lieu des diamètres d'égale longueur de l'ellipsoïde ; c'est un cône du 2e degré.

Les 3 axes de l'ellipsoïde sont dits axes principaux d'inertie, et les moments d'inertie par rapport à ces axes sont les moments d'inertie principaux. Les 3 plans principaux de l'ellipsoïde sont appelés plans principaux d'inertie.

En chaque point de l'espace il y a, pour un système donné, 3 axes principaux et 3 plans principaux d'inertie. Il y a une infinité de plans principaux autour d'un des axes si l'ellipsoïde est de révolution ; il y a une infinité d'axes et de plans principaux si l'ellipsoïde est une sphère.

Pour que l'axe Oz soit un axe principal d'inertie relatif au p. O, il faut que le plan Oxy soit un plan principal d'inertie, c.à.d. un plan de symétrie pour l'ellipsoïde ; z ne doit donc pas figurer au 1er degré dans l'équation, ce qui exige $D = 0$, $E = 0$,

c.à.d. $\Sigma mxz = 0$ $\Sigma myz = 0$.

En général, l'axe Oz ne sera axe principal que relativement au seul point O. Supposons qu'il le soit aussi pour un autre point O' ($z = h$). Menons par O' des axes $O'x'y'z'$ parallèles aux premiers ; on doit avoir : $\Sigma m x' z' = 0$ $\Sigma m y' z' = 0$

Or : $x' = x$ $y' = y$ $z' = z - h$ Donc

$\Sigma m x (z-h) = 0$ $\Sigma m y (z-h) = 0$ ce qui revient à :

$h \Sigma m x = 0$ $h \Sigma m y = 0$

Ces nouvelles conditions expriment que le centre de gravité du système se trouve sur Oz. Comme elles sont remplies quel que soit h, l'axe Oz sera un axe principal pour tous ses points, et en particulier pour le centre de gravité. Donc les axes principaux relatifs au centre de gravité sont les seuls qui soient axes principaux pour tous leurs points.

L'étude de la distribution des axes et plans principaux de inertie dans l'espace est liée à la théorie des surfaces homofocales du 2e degré.

Prenons pour origine le centre de gravité G ; on aura

$$\Sigma m x = 0 \qquad \Sigma m y = 0 \qquad \Sigma m z = 0$$

et pour axes les axes principaux relatifs au point G ; on aura :

$$\Sigma m y z = 0 \qquad \Sigma m z x = 0 \qquad \Sigma m x y = 0$$

Posons : $\Sigma m x^2 = M a^2$ $\Sigma m y^2 = M b^2$ $\Sigma m z^2 = M c^2$

ce sont les 3 moments d'inertie principaux (M = masse totale)

Cherchons l'enveloppe des plans par rapport auxquels le moment d'inertie a une valeur constante donnée $M k^2$. L'équation du plan variable sera : $ux + vy + wz + 1 = 0$

La distance d'un point $(x\,y\,z)$ du système à ce plan est :

$$\delta = \pm \frac{ux+vy+wz+1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$ On aura : $\Sigma m\delta^2 = Mk^2$.

ou : $$\Sigma m(ux+vy+wz+1)^2 = Mk^2(u^2+v^2+w^2)$$

ou : $$M(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2+1) = Mk^2(u^2+v^2+w^2)$$

(les doubles produits disparaissent du 1er membre, grâce aux hypothèses)

$$u^2(a^2-k^2)+v^2(b^2-k^2)+w^2(c^2-k^2)+1=0$$

Telle est l'équation de condition qui lie les coefficients du plan mobile, c.à.d. l'équation tangentielle de son enveloppe ; elle devient, en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{x^2}{a^2-k^2}+\frac{y^2}{b^2-k^2}+\frac{z^2}{c^2-k^2}+1=0 \qquad (1)$$

Elle représente une surface du 2e ordre ; elle n'est réelle que si l'un des dénominateurs au moins est négatif ; en supposant :

$a^2>b^2>c^2$, il faut qu'on ait : $k^2 \geq c^2$.

Le minimum du moment d'inertie est donc Mc^2 —

On aura un ellipsoïde pour enveloppe du plan si $k^2>a^2$; un hyperboloïde à 1 nappe si $k^2>b^2$; un hyperboloïde à 2 nappes si $k^2>c^2$. — On sait que lorsque k^2 varie de c^2 à ∞, on a toutes les surfaces homofocales (de centre G.)

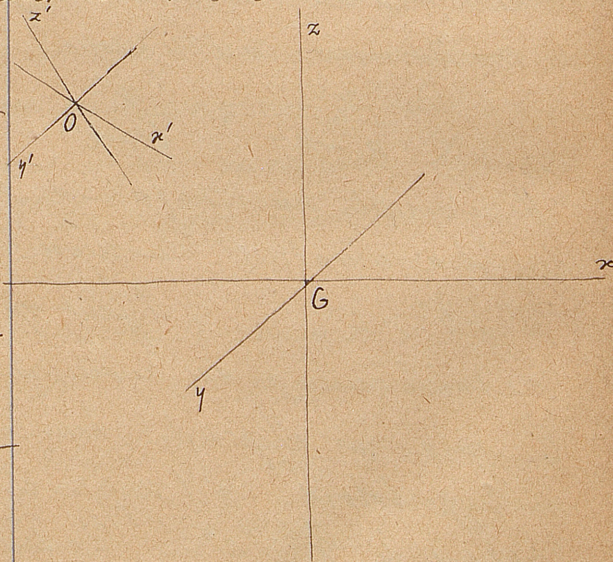
Théorème. Les 3 plans principaux d'inertie en un point O de l'espace sont les plans tangents aux 3 surfaces homofocales qui passent en O.

— Cherchons, parmi les plans passant par O, ceux par rapport auxquels le moment d'inertie a une valeur donnée Mk^2. Ces plans :

auront pour enveloppe le cône circonscrit à la surface du 2e degré (de centre G) qui correspond à cette valeur, et ayant pour sommet O. Cette enveloppe sera en général un véritable cône, et le plan sera indéterminé; mais elle se réduit à un plan double quand la surface passe par le point O, et ce plan double est tangent à cette surface en O.

Ainsi l'enveloppe des plans pour lesquels le moment d'inertie est Mk^2 se réduit à un plan quand k^2 est une des 3 racines de l'équation (1) considérée comme équation en k^2, et ces 3 plans sont respectivement tangents en O aux 3 surfaces homofocales qui passent par O et correspondent à ces 3 racines.

— D'autre part, prenons pour axes $(x'y'z')$ les 3 axes principaux d'inertie relatifs au point O, et posons: $\Sigma m x'^2 = M\alpha^2$ $\Sigma m y'^2 = M\beta^2$ $\Sigma m z'^2 = M\gamma^2$ ce sont les moments d'inertie par rapport aux 3 plans principaux en O.



Cherchons directement l'enveloppe de tous les plans passant par O et pour lesquels le moment d'inertie a une valeur donnée Mk^2:

l'équation du plan mobile est: $ux' + vy' + wz' = 0$

On doit avoir: $\Sigma m \dfrac{(ux'+vy'+wz')^2}{u^2+v^2+w^2} = Mk^2$ d'où l'on tire:

$M(\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 w^2) = Mk^2(u^2+v^2+w^2)$ les termes rectangles sont nuls, les axes étant axes principaux d'inertie par rapport à O.

$$u^2(\alpha^2-k^2)+v^2(\beta^2-k^2)+w^2(\gamma^2-k^2)=0$$

Elle est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan ; en coordonnées cartésiennes :
$$\frac{x'^2}{\alpha^2-k^2}+\frac{y'^2}{\beta^2-k^2}+\frac{z'^2}{\gamma^2-k^2}=0$$

Cette équation représente un véritable cône sauf dans les cas où :
$k^2=\alpha^2$, $k^2=\beta^2$, $k^2=\gamma^2$

L'enveloppe du plan se réduit alors à un des 3 plans principaux relatifs au point O. – Rapprochons ce résultat du précédent : on en conclut que les valeurs α^2 β^2 γ^2 sont les racines de l'équation (1) en k^2, et que les plans doubles tangents en O aux 3 surfaces homofocales qui correspondent à ces racines sont précisément les plans principaux d'inertie relatifs au point O.

Les moments d'inertie par rapport à ces 3 plans principaux sont
$M\alpha^2$, $M\beta^2$, $M\gamma^2$, $\alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2$ étant les racines de l'équation (1) en k^2. – On a ainsi une image très simple de la répartition des axes et des plans principaux d'inertie dans l'espace



Théorèmes généraux de la dynamique

Pour avoir les équations du mouvement d'un système matériel, on écrit les équations du mouvement de chacun de ses points en y faisant figurer les forces auxquelles il est soumis, et on réunit toutes ces équations.

Il y a lieu de distinguer, en dynamique comme en statique, les forces intérieures et les forces extérieures au système.

Considérons un point (x, y, z) du système, de masse m : on appelle forces intérieures appliquées au point les actions exercées sur lui par les autres points du système ; forces extérieures toutes les autres. Soient $X_i \; Y_i \; Z_i$ les projections d'une force intérieure, $X_e \; Y_e \; Z_e$ celles d'une force extérieure ; les équations du mouvement du point m seront :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma X_e \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma Y_e \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma Z_e$$

On aura des équations analogues pour tous les points du système.

Ajoutons toutes les équations relatives à l'axe des x :

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma\Sigma X_i + \Sigma\Sigma X_e$$

Dans cette combinaison, les forces intérieures disparaissent du 2e membre. en effet, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les forces intérieures sont deux à deux égales et directement opposées.

D'autre part le 1er membre peut se mettre sous la forme d'une dérivée ; on a donc l'équation :

$$\frac{d}{dt}\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma\Sigma X_e$$

où $\Sigma m \frac{dx}{dt}$ est la somme des projections des quantités de mouvement des divers points du système sur l'axe des x. D'où ce théorème :

La dérivée par rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement (du système) sur un axe est égale à la somme des

projections des forces extérieures sur cet axe.
Ce théorème peut s'énoncer sous une autre forme, qui est plus usitée.
Soient : ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité du système à un instant donné ; soit M la masse totale du système : $M = \Sigma m$;
on sait qu'on a la relation : $M\xi = \Sigma mx$

d'où : $M\frac{d\xi}{dt} = \Sigma m \frac{dx}{dt}$ $\quad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$.

Les équations obtenues en sommant les équations du mouvement peuvent donc s'écrire :

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\Sigma X_e \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma\Sigma Y_e \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma\Sigma Z_e$$

Ce sont les équations du mouvement du point (ξ, η, ζ), de masse M, soumis aux forces qui figurent dans les 2ds membres ; on en conclut :

Théorème du mouvement du centre de gravité : Le centre de gravité d'un système se meut comme un point matériel libre ayant une masse égale à la masse totale du système, et sollicité par des forces égales et parallèles aux forces extérieures.

Les équations précédentes peuvent remplacer 3 équations du mouvement ; mais elles ne peuvent pas en général s'intégrer indépendamment des autres équations, à moins que leurs 2ds membres ne dépendent que de ξ, η, ζ, auquel cas on a un système de 3 équations à 3 inconnues, comme pour un point matériel libre.
Quand ce système a une forme connue qu'on sait intégrer, le théorème précédent permet de trouver immédiatement le mouvement du centre de gravité du système.

— Exemples : Mouvement dans le vide d'un système pesant, déformable ou non.

Le centre de gravité se meut comme un point matériel libre ~~pesant~~ ayant pour masse la masse totale du système, et soumis au poids total : Mg, c.à.d. soumis à la pesanteur en raison de sa masse. Il se meut donc comme un point matériel pesant entièrement libre, et décrit une parabole d'axe vertical.

Par exemple, le centre de gravité d'un projectile qui fait explosion suit sa trajectoire parabolique quel que soit le mouvement des fragments, parce que les forces qui ont produit l'explosion sont intérieures au système.

— Mouvement d'un système de points attirés par un centre fixe proportionnellement aux masses et aux distances.

Soit le centre fixe O attirant les points M_1 M_2 .... suivant cette loi ; soient $F_1, F_2, \ldots$ les forces attractives dirigées vers O :

$$F_1 = f m_1 \overline{OM_1} \qquad F_2 = f m_2 \overline{OM_2} \quad , \ldots\ldots$$

Les forces intérieures peuvent être quelconques. Le centre de gravité se meut comme un point matériel libre sollicité par toutes ces forces extérieures, ou par leur résultante. Or on a vu en statique(1) que la résultante des attractions exercées sur un point O par un système de points M_1 M_2 ..... est égale à l'attraction qu'exercerait sur ce même point le centre de gravité G du système suivant la même loi — ayant la masse totale.

Comme les attractions exercées par le centre O sur les points M_1 M_2 .... sont égales et contraires aux précédentes, on peut dire, inversement, que leur résultante est l'attraction qu'exercerait le centre O sur le point G où serait concentrée la masse totale du système. Cette résultante est donc égale à : $R = f . M . \overline{GO}$ et dirigée vers O (la résultante précédente étant $f . M . \overline{OG}$.)

Le centre de gravité se meut donc comme un point matériel libre

(1) 1er cahier, page 76.

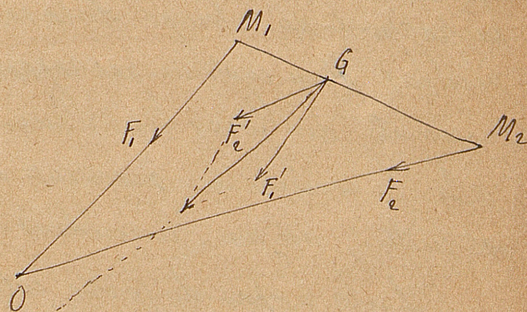
de masse M attiré par le centre fixe O proportionnellement à la distance. On sait qu'il décrit une ellipse ayant O pour centre.

Cet exemple comprend le précédent comme cas particulier : il suffit de supposer le p. O à l'infini ; les attractions deviennent parallèles et proportionnelles aux masses.

– On voit par ces exemples que le théorème du mouvement du centre de gravité fournit de nombreuses applications des résultats de la dynamique du point matériel, qui semblait n'être qu'une abstraction.

– Nous avons dit qu'en général on ne peut connaître séparément le mouvement du centre de gravité ; en voici un exemple simple.

Soit un système de 2 points M_1, M_2 qui s'attirent et sont attirés par un centre fixe O en raison inverse du carré de la distance.



Le centre de gravité G du système (sur la droite $M_1 M_2$) se meut comme un point matériel sollicité par 2 forces égales et parallèles aux attractions F_1, F_2. Mais leur résultante dépend des coordonnées des 2 points, et les équations du mouvement du centre de gravité contiendront $\xi \eta \zeta$, et $x_1 y_1 z_1$ par exemple. Il faudra donc joindre à ces 3 équations les 3 équations du mouvement du point M_1 ; on aura à résoudre un système de 6 équations comme celui des équations des 2 p. $M_1 M_2$, auquel il est d'ailleurs équivalent.

Revenons aux équations du mouvement de chaque point du système :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma X_e \qquad m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma Y_e \qquad m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma Z_e$$

Effectuons sur elles la combinaison des moments :

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(xY_i - yX_i) + \Sigma(xY_e - yX_e)$$

ou : $$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] = \Sigma(xY_i - yX_i) + \Sigma(xY_e - yX_e)$$

Faisons la même combinaison pour tous les points du système, et ajoutons : $$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\Sigma(xY_i - yX_i) + \Sigma\Sigma(xY_e - yX_e)$$

Or les forces intérieures étant deux à deux égales et directement opposées leurs moments sont deux à deux égaux et de signe contraire, donc leur somme est nulle ; il reste :

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\Sigma(xY_e - yX_e)$$ d'où :

Théorème des moments des quantités de mouvement : La dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement d'un système par rapport à un axe est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe.

Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe est nulle, on a immédiatement une intégrale première du mouvement.

S'il n'y a pas de forces extérieures, le centre de gravité, en vertu du 1er théorème, a un mouvement rectiligne et uniforme. On a d'autre part, par rapport à chaque axe, une relation de la forme :

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C$$

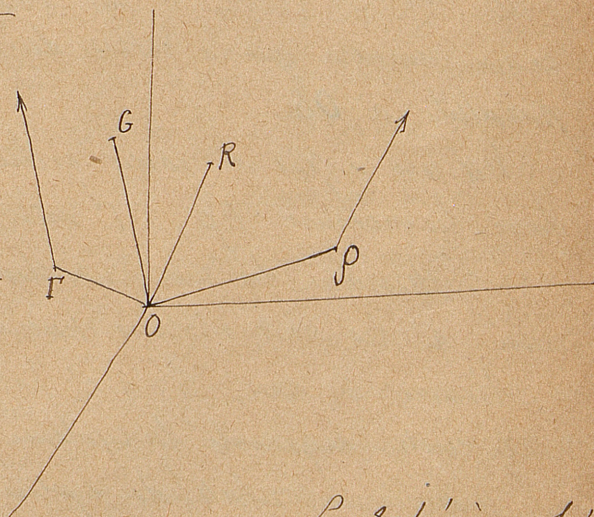
qui exprime que le mouvement projeté sur le plan des xy s'effectue suivant la loi des aires. — Pour formuler cette loi pour un système de points, considérons l'aire A engendrée par la projection d'un point. on a : $dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ Donc : $\Sigma m\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$.

Intégrons : $\Sigma m A = \frac{C}{2} t + C'$ ce qui signifie : La somme des aires décrites par les projections des divers points, respectivement multipliées par la masse du point correspondant, est proportionnelle au temps. — C est égal au double de la somme précédente pendant l'unité de temps. On peut annuler C' en comptant les aires à partir de l'instant initial ($t = 0$)

On peut appliquer ce théorème au système solaire, puisqu'aucune force extérieure n'agit sur lui (les actions des étoiles sont insensibles.) La projection du mouvement sur un plan quelconque obéit donc à la loi des aires, ou encore la rotation des divers corps du système autour d'un axe quelconque s'effectue suivant la loi des aires.

Les 2 théorèmes généraux que nous venons de démontrer peuvent s'interpréter géométriquement.

Soient 3 axes rectangulaires $Oxyz$. Les forces extérieures appliquées au système constituent un système de vecteurs ; soit OR sa résultante générale, OG son moment résultant par rapport au point O. — Les quantités de mouvement forment un autre système de vecteurs (mv dans l'espace) soit $O\rho$ sa résultante générale, $O\Gamma$ son moment résultant par rapport à O. Les 2 théorèmes précédents expriment une relation très simple entre ces 4 vecteurs.



En effet, les projections de OR sont : ΣX_e, ΣY_e, ΣZ_e

celles de $O\rho$ sont : $\alpha = \Sigma m \frac{dx}{dt}$, $\beta = \Sigma m \frac{dy}{dt}$, $\gamma = \Sigma m \frac{dz}{dt}$

Le théorème relatif aux projections des quantités de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma\Sigma X_e \qquad \frac{d\beta}{dt} = \Sigma\Sigma Y_e \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \Sigma\Sigma Z_e$$

ce qui signifie que la vitesse du point ρ dans l'espace est égale et parallèle à OR.

De même, les projections de OG sont :

$$\Sigma(xY_e - yX_e) \qquad \Sigma(yZ_e - zY_e) \qquad \Sigma(zX_e - xZ_e)$$

celles de $O\Gamma$ sont :

$$\nu = \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \qquad \lambda = \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \qquad \mu = \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement se traduit par :

$$\frac{d\nu}{dt} = \Sigma(xY_e - yX_e) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \Sigma(yZ_e - zY_e) \qquad \frac{d\mu}{dt} = \Sigma(zX_e - xZ_e)$$

ce qui montre que la vitesse du point Γ dans l'espace est égale et parallèle à OG.

S'il n'y a pas de forces extérieures, les vecteurs OR, OG sont nuls, donc les vecteurs $O\rho$, $O\Gamma$ ont une position fixe dans l'espace.

Le théorème des moments des quantités de mouvement s'applique aussi à des axes mobiles menés par le centre de gravité G.

Menons les axes $Gx'y'z'$ parallèles aux axes fixes ; ils sont entraînés par le centre de gravité du système dans un mouvement de translation. Le mouvement relatif du système par rapport à ces axes mobiles est ce qu'on appelle le mouvement autour du centre de gravité ; quand on le connaît et qu'on connaît le mouvement du centre de gravité on connaît complètement le mouvement absolu du système. Or on a dans les axes fixes, en vertu du th. des mom. des quant. de mouv.,

la relation : $\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum(xY_e-yX_e)$

On va démontrer que la même équation est vraie dans les axes mobiles, et que par conséquent on n'a pas besoin, pour connaître le mouvement relatif du système dans les axes mobiles choisis, de faire intervenir la force centrifuge (la force centrifuge composée se trouve déjà éliminée par le fait que les axes mobiles éprouvent une simple translation.)

Partant de l'équation précédente, faisons le changement d'axes :

$$x=\xi+x' \qquad y=\eta+y' \qquad z=\zeta+z'$$

ξ,η,ζ étant les coordonnées absolues du centre de gravité. Le 1er membre devient : $\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum m\left[(x'+\xi)\frac{dy'+d\eta}{dt}-(y'+\eta)\frac{dx'+d\xi}{dt}\right]$

$$=\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)+\sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)+\sum m\left(x'\frac{d\eta}{dt}-y'\frac{d\xi}{dt}\right)+\sum m\left(\xi\frac{dy'}{dt}-\eta\frac{dx'}{dt}\right)$$

Or les 2 derniers termes s'annulent, parce que l'origine choisie est le centre de gravité, on a en effet : $\sum mx'\frac{d\eta}{dt}=\frac{d\eta}{dt}\sum mx'=0$

et de même : $\sum m\xi\frac{dy'}{dt}=\xi\sum m\frac{dy'}{dt}=0$ comme $\sum my'=0$.

La somme des moments des quantités de mouvement se réduit donc à :

$$\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)+M\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right) \qquad M=\sum m$$

d'où :

Théorème : La somme des moments des quantités de mouvement d'un système par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe mené par le centre de gravité du système parallèlement au 1er, augmentée du moment de la quantité de mouvement de la masse totale, supposée concentrée au centre de gravité, par rapport à l'axe fixe.

(cf théorème relatif aux moments d'inertie, page 94.)

Le 2e membre de l'équation devient :

$$\Sigma(x Y_e - y X_e) = \Sigma\left[(x'+\xi)Y_e - (y'+\eta)X_e\right]$$
$$= \Sigma(x' Y_e - y' X_e) + \Sigma(\xi Y_e - \Sigma \eta X_e)$$

On a donc :

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) + M\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = \Sigma(x' Y_e - y' X_e) + \Sigma(\xi Y_e - \Sigma \eta X_e)$$

Or les derniers termes des 2 membres se détruisent, car on a, en vertu du théorème du mouvement du centre de gravité :

$$M\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma \xi Y_e \qquad \text{et} \qquad M\eta\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma \eta X_e$$

Il reste : $\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = \Sigma(x' Y_e - y' X_e)$ c. q. f. d.

On a ainsi immédiatement 3 équations du mouvement relatif par rapport aux axes issus du centre de gravité, dégagées de toute force fictive.

De cette formule on tire les mêmes conclusions que pour les axes fixes. Si la somme des moments des forces extérieures est nulle par rapport à un axe passant par le centre de gravité, on a par cette formule une intégrale première du mouvement ; par exemple :

$$\Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = C$$

et cette équation recevra la même interprétation ; elle exprime que la projection du mouvement sur le plan $Gx'y'$ ~~se fait~~ obéit à la loi des aires.

On peut encore appliquer ce théorème au mouvement du système solaire : Si l'on mène par son centre de gravité des axes de direction fixe, le mouvement s'effectuera autour de chacun d'eux suivant la loi des aires.

L'interprétation géométrique de ce théorème est la même que ci-dessus. Remarquons que les projections des forces extérieures sont les mêmes sur les axes mobiles que sur les axes fixes, puisqu'ils sont parallèles. Soit GG' le moment résultant des forces extérieures par rapport à G, et GI' le moment résultant des quantités de mouvement relatives (produit de la vitesse relative par la masse). Le théorème exprime que la vitesse relative du point I' (dans le système mobile) est égale et parallèle au vecteur GG'.

S'il n'y a pas de forces extérieures, GG' est nul, donc le point I' reste fixe dans le système mobile; le vecteur GI' reste donc constant en grandeur et en direction.

Dans le système solaire en particulier, où les forces extérieures sont nulles (ou absolument négligeables), le segment GI' reste constant. On peut calculer ses projections sur les 3 axes de direction fixe; ce sont les sommes des moments des quantités de mouvement du système par rapport aux 3 axes; on connaît par suite sa direction, qui est constante.

Le plan perpendiculaire à GI' et passant par G reste toujours parallèle à lui-même: c'est le plan invariable de Laplace. C'est à ce plan qu'on rapporte les positions de l'équateur et de l'écliptique et c'est par rapport à ce plan considéré comme fixe qu'on étudie le mouvement de ces plans.

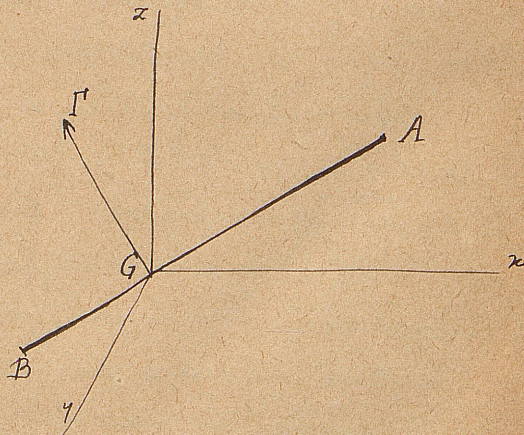
On peut remarquer que le plan perpendiculaire au vecteur GI' est en général le plan du maximum des aires: en effet, pour avoir la valeur de la constante des aires pour un plan quelconque, il suffit de projeter le vecteur GI' sur l'axe de ce plan. On voit donc que le maximum de la constante des aires a lieu pour le plan invariable.

perpendiculaire à Γ. $\left[C = \Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = \nu'\right.$ proj. de GΓ' sur Gz'.$\left.\right]$

Poinsot, dans sa Statique, a légèrement corrigé les calculs par lesquels Laplace avait déterminé la position du plan invariable en tenant compte des rotations des planètes sur elles-mêmes, que Laplace avait négligées.

— Exemple. Considérons une barre rigide pesante lancée dans le vide. — On sait, par le théorème du mouvement du centre de gravité, que le centre de gravité G de cette barre décrit une parabole d'axe vertical. Menons les axes Gxyz de directions fixes; les forces extérieures étant nulles par rapport à ces axes (puisque leur résultante Mg est appliquée en G) la loi des aires s'applique aux 3 plans, ce qui se traduit géométriquement par ce fait que le moment résultant GΓ est fixe dans les axes mobiles.

On va démontrer que la barre tourne avec une vitesse angulaire constante dans le plan invariable perpendiculaire à GΓ.



Soit A $(x_0\, y_0\, z_0)$ une extrémité de la barre; posons: $GA = l$

Considérons le point m de la barre à une distance r de G: ses coordonnées sont:

$$x = \frac{r x_0}{l} \qquad y = \frac{r y_0}{l} \qquad z = \frac{r z_0}{l}$$

Le moment de la quantité de mouvement par rapport à Gz est:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{r^2}{l^2}\left(x_0\frac{dy_0}{dt} - y_0\frac{dx_0}{dt}\right)$$

La somme de ces moments pour tous les points de la barre est:

$$\frac{1}{l^2}\left(x_0\frac{dy_0}{dt} - y_0\frac{dx_0}{dt}\right)\Sigma m r^2$$

Or: $\Sigma m r^2 = M k^2$

moment d'inertie de la barre par rapport à son centre de gravité G ; on a donc :
$$\frac{Mk^2}{l^2}\left(x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt}\right) = C$$
équation qui exprime la loi des aires dans le plan Gxy. De même :
$$\frac{Mk^2}{l^2}\left(y_0 \frac{dz_0}{dt} - z_0 \frac{dy_0}{dt}\right) = A \qquad \frac{Mk^2}{l^2}\left(z_0 \frac{dx_0}{dt} - x_0 \frac{dz_0}{dt}\right) = B$$
équations relatives aux 2 autres plans. On tire de ces 3 équations :
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$$
équation d'un plan fixe passant par l'origine G, dans lequel doit rester le point A, et par suite la barre entière. Le mouvement obéissant à la loi des aires, la barre tourne avec une vitesse angulaire constante. Les constantes A, B, C se déterminent par les conditions initiales : on voit que ce sont les moments de la quantité de mouv. du p. A par rapport aux 3 axes à l'instant initial (à des facteurs constants près.) Elles sont proportionnelles aux projections du vecteur GI sur les 3 axes ; donc le plan dont elles sont les coefficients est le plan invariable, ou le plan du maximum des aires.

Théorème des forces vives pour un système matériel.

Pour chaque point du système, on a les équations du mouvement :
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma X_e \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma Y_e \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma Z_e$$
Effectuons sur elles la combinaison des forces vives ; on trouve :
$$d\,\frac{mv^2}{2} = \Sigma(X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz) + \Sigma(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz)$$
Ajoutons les équations analogues pour tous les points du système :
$$d\,\Sigma\frac{mv^2}{2} = \Sigma\Sigma(X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz) + \Sigma\Sigma(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz)$$

d'où le 1er énoncé du théorème:

La différentielle de la demi-force vive totale du système est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces du ~~système~~.

Il faut remarquer que les forces intérieures ne disparaissent pas, comme dans les 2 théorèmes relatifs aux quantités de mouvement. En effet, la somme de leurs travaux élémentaires n'est pas nulle en général: les forces intérieures exercées par 2 points l'un sur l'autre sont égales et directement opposées; soit F leur valeur commune, prise positivement si les 2 points se repoussent, négativement s'ils s'attirent; on appelle cette quantité leur action mutuelle; or on a vu, en statique (2e cahier, page 35) que la somme des travaux des 2 forces, ou le travail de l'action mutuelle des 2 points, est égal à $F dr$,

dr étant la différentielle de leur distance. Ce travail n'est pas nul, à moins que les 2 points ne soient invariablement liés entre eux.

Donc la somme des travaux élémentaires des forces intérieures ne s'annule que lorsque le système est un corps solide. On a donc, pour les systèmes solides seulement, la relation suivante:

$$d\frac{\sum m v^2}{2} = \sum\sum(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz)$$

où ne figurent que les forces extérieures du système.

Il y a un cas où la somme des travaux des forces intérieures est une différentielle totale exacte; c'est quand les actions mutuelles de 2 points quelconques sont fonctions de la distance seulement: on a en effet:

$F = \varphi(r)$ $$F dr = d\int \varphi(r)\, dr$$

Appelons U_i la somme des intégrales analogues; c'est la fonction des forces intérieures; on aura

$$\sum\sum(X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) = dU_i$$

La fonction $-U_i$ s'appelle potentiel des forces intérieures ou énergie potentielle du système. Elle n'est déterminée qu'à une constante près, c.à.d. qu'on peut choisir arbitrairement sa valeur initiale. On la choisit en général assez grande pour que l'énergie potentielle soit positive dans toutes les configurations considérées du système. On peut remarquer que c'est une fonction purement géométrique, qui ne dépend que de la configuration du système. Dans ce cas, où les forces intérieures ne dépendent que des positions relatives des points, on peut écrire, en faisant passer dU_i dans le 1er membre

$$d\left[\sum \frac{mv^2}{2} - U_i\right] = \sum\sum\left(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz\right)$$

Le 1er membre est ce qu'on appelle la différentielle de l'énergie totale: l'énergie totale est la somme du potentiel et de la demi force vive du système. Celle-ci est une fonction purement cinématique qui ne dépend que des vitesses des divers points du système: on l'appelle énergie cinétique ou actuelle. On en conclut ce théorème. La différentielle de l'énergie totale est égale à la somme des travaux élémentaires des forces extérieures.

Si l'on intègre l'équation précédente, on a la formule finie:

$$\left(\sum \frac{mv^2}{2} - U_i\right) - \left(\sum \frac{mv_0^2}{2} - U_{i_0}\right) = \int_{t_0}^{t} \sum\sum\left(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz\right)$$

d'où ce second théorème:

La variation de l'énergie totale pendant un temps fini est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant le même temps.

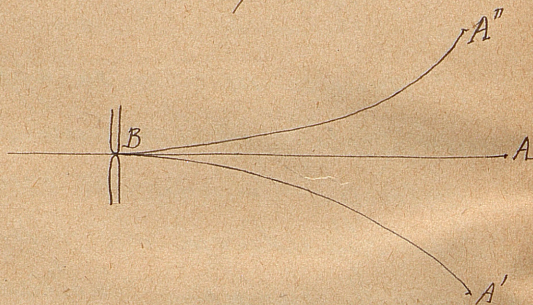
Ce principe joue un rôle important dans la théorie mécanique de la chaleur.

Dans le cas particulier où le système n'est soumis à aucune force extérieure, son énergie totale reste constante (Principe de la conservation de l'énergie.)

On peut donner une définition mécanique de l'énergie potentielle : le potentiel $-V_i$ est égal à la somme des travaux élémentaires des forces intérieures quand on fait passer le système de la configuration actuelle à la configuration pour laquelle le potentiel s'annule. En effet, on a en général : $U_{i_0} - V_i = \int^t \sum\sum (X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz)$

Si l'on prend $U_{i_0} = 0$, on a la valeur du potentiel $-V_i$.

— Exemple : Considérons une lame AB parfaitement élastique, fixée à son extrémité B. Admettons que les forces intérieures ne dépendent que des distances relatives des divers points, c. à d. qu'il y ait un potentiel. Dans la position d'équilibre, AB, l'énergie cinétique est nulle, le système étant au repos ; convenons de faire l'énergie potentielle nulle pour cette position ; l'énergie totale sera nulle.

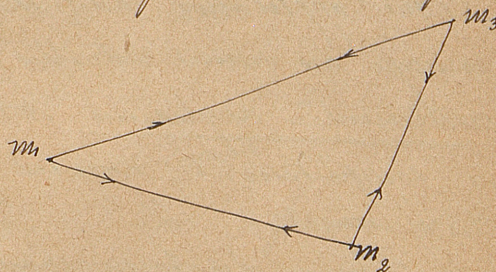


Amenons la lame dans une nouvelle position BA', et maintenons-la au repos. L'énergie cinétique est nulle, mais l'énergie potentielle est égale au travail effectué pour l'amener en cette position, puisque ce travail est égal et contraire au travail des forces intérieures dans le déplacement AA'. L'énergie totale a donc une valeur positive égale à ce travail. Abandonnons la lame : les travaux des forces extérieures seront nuls (le p. B étant fixe par hypothèse) donc l'énergie totale

sera constante pendant le mouvement. La lame revient à sa position d'équilibre; mais quand elle ~~arrive~~ en BA, son énergie potentielle est nulle, donc son énergie cinétique s'est accrue et devient égale à l'énergie potentielle qu'elle avait en BA'. Elle dépasse donc BA et va jusqu'en BA" symétrique de BA'; là elle s'arrête, parce que l'énergie potentielle reprend sa valeur initiale et que l'énergie cinétique s'annule. Les mêmes phénomènes se reproduisent alors en sens inverse, et la lame oscille indéfiniment autour de BA, en allant de A' à A" & vice versa.

— Exemple: Intégrale des forces vives dans le problème des 3 corps.

Soient m_1, m_2, m_3 les masses des 3 points, r_1, r_2, r_3 leurs distances. L'action mutuelle de $m_1\, m_2$ est:



$$-f\frac{m_1 m_2}{r_3^2}$$

l'action mutuelle de $m_2\, m_3$ est:

$$-f\frac{m_2 m_3}{r_1^2}$$

celle de $m_3\, m_1$ est: $\quad -f\dfrac{m_3 m_1}{r_2^2}$

Ces 3 actions mutuelles représentent les 6 forces intérieures du système. La fonction des forces intérieures est: $U_i = \dfrac{f m_1 m_2}{r_3} + f\dfrac{m_2 m_3}{r_1} + f\dfrac{m_3 m_1}{r_2}$

On donne aux 3 points des vitesses initiales quelconques, c.à.d qu'on leur imprime une certaine énergie cinétique; comme, par hypothèse, aucune force extérieure n'agit sur eux, leur énergie totale est constante:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} - \left(\frac{f m_1 m_2}{r_3} + f\frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{f m_3 m_1}{r_2}\right) = C^{te}$$

L'énergie potentielle s'annulerait si les distances des 3 points étaient infinies.

Elle est donc égale à la somme des travaux des forces intérieures si l'on éloignait les 3 points à l'infini à partir de leur position actuelle.
— Nous venons de traiter le cas où il y a une fonction des forces intérieures; s'il y a aussi une fonction des forces extérieures, on dit simplement qu'il y a une fonction de forces : $V(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots x_n y_n z_n) = U_i + U_e$
On a alors immédiatement l'intégrale première des forces vives

$$d\sum \frac{mv^2}{2} = dV \qquad \sum \frac{mv^2}{2} = V + h \qquad \left(h = \sum \frac{mv_0^2}{2} - V_0\right)$$

— Pour l'application du théorème des forces vives (comme pour celle du principe des vitesses virtuelles) il est utile de distinguer les forces directement appliquées et les forces de liaison. Celles-ci ne sont pas complètement connues et déterminées; il y a donc intérêt à les éliminer.
Le théorème des forces vives, avons nous vu, s'applique à toutes les forces qui agissent sur tous les points du système, donc aux forces de liaison comme aux forces directement appliquées. Mais on a démontré en statique (2e cahier, page 34) que pour tout déplacement compatible avec les liaisons, supposées indépendantes du temps et sans frottement, la somme des travaux des forces de liaison est nulle, quel que soit l'état du système. Donc, dans ce cas, la différentielle de la demi force vive est égale à la somme des travaux élémentaires des forces directement appliquées.
Comme le théorème des moments des quantités de mouvement (page 108) le théorème des forces vives s'applique au mouvement relatif du système autour du centre de gravité.
Menons par le centre de gravité G 3 axes parallèles aux axes fixes;

Soient ξ, η, ζ les coordonnées absolues de G ; V sa vitesse. Considérons un point de masse <u>m</u> ; soient $x'y'z'$ ses coordonnées relatives, v sa vitesse absolue, v' sa vitesse relative. On sait qu'on a, dans l'espace :

$$(v) = (V) + (v')$$

$$V^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 \qquad v^2 = \Sigma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad v'^2 = \Sigma\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2$$

Effectuons le changement de coordonnées :

$$x = \xi + x' \qquad y = \eta + y' \qquad z = \zeta + z'$$

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)^2$$

$$v^2 = V^2 + v'^2 + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)$$

On doit calculer la force vive totale : $\Sigma m v^2$

Or : $\Sigma m V^2 = V^2 \Sigma m = MV^2$ — $\Sigma m v'^2$ = force vive <u>relative</u>.

Les termes rectangles disparaissent de la somme parce que l'origine est le centre de gravité : $\Sigma m \frac{d\xi}{dt}\frac{dx'}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0$

car : $\Sigma m x' = 0$ et ainsi des autres — d'où :

<u>Théorème</u> : $\Sigma m v^2 = MV^2 + \Sigma m v'^2$

La force vive totale d'un système est égale à la force vive du système dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité, augmentée de la force vive qu'aurait la masse totale concentrée au centre de gravité.

Ce théorème est utile dans beaucoup de cas car il est souvent plus aisé de calculer MV^2 et $\Sigma m v'^2$ que $\Sigma m v^2$.

D'autre part le 2e membre de l'équation des forces vives devient :

$$\Sigma\left[X_i(d\xi + dx') + Y_i(d\eta + dy') + Z_i(d\zeta + dz')\right] + \Sigma\left[X_e(d\xi + dx') + Y_e(d\eta + dy') + Z_e(d\zeta + dz')\right]$$

ou : $\Sigma\Sigma X_i d\xi + \Sigma\Sigma X_i dx' + \Sigma\Sigma X_e d\xi + \Sigma\Sigma X_e dx'$.

Or : $\Sigma\Sigma X_i d\xi = d\xi \, \Sigma\Sigma X_i = 0$ $\qquad \Sigma\Sigma X_e d\xi = d\frac{MV^2}{2}$

en vertu du théorème des forces vives appliqué au mouvement du centre de gravité ; il reste donc dans l'équation des forces vives :

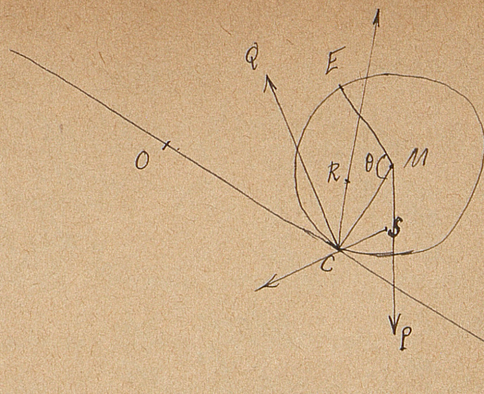
$$d\Sigma \frac{mv'^2}{2} = \Sigma\Sigma X_i dx' + \Sigma\Sigma X_e dx'$$

formule qui exprime le théorème des forces vives appliqué au mouvement relatif du système par rapport à des axes de direction fixe passant par le centre de gravité.

On pourrait retrouver ce théorème en appliquant le théorème du mouvement relatif, c.à.d. en tenant compte de la force centrifuge (la force centrifuge composée est nulle, le mouvement d'entraînement étant une translation.) Toutes les forces fictives qu'on ferait intervenir seraient parallèles et proportionnelles aux masses des divers points ; donc leur somme serait nulle, puisque l'origine est le centre de gravité.
$\left(\Sigma m \frac{d^2\xi}{dt^2} dx' = \frac{d^2\xi}{dt^2} \Sigma m dx' = 0 \qquad \text{car : } \Sigma mx' = 0 \right)$

Le théorème des forces vives est surtout utile pour les systèmes à liaisons complètes, quand ces liaisons sont indépendantes du temps. En effet, comme la configuration du système ne dépend que d'un paramètre, il suffit, pour connaître son mouvement, d'avoir une équation indépendante des liaisons. C'est le théorème des forces vives qui fournit cette équation, car nous venons de voir que dans ce cas les forces de liaison disparaissent.

<u>Exemple</u>. Mouvement d'un disque homogène pesant situé dans un plan vertical, et roulant sans glisser sur une droite inclinée sur l'horizon.



La seule force directement appliquée est le poids total du disque Mg appliqué en son centre. Parmi les forces de liaison, celles qui relient entre eux les points du disque ont un travail nul, puisque le disque est supposé solide. Une autre force de liaison est la réaction de la droite fixe sur le disque mobile : c'est une force extérieure au système ; mais son travail est aussi nul, la liaison consistant en un roulement (2e cahier, page 37).

On pourrait retrouver directement cette proposition qu'il s'agit de démontrer en statique. La réaction CQ peut se décomposer en 2 forces passant par C appliquées en 2 points quelconques R, S fixes dans le disque mobile — or ~~le déplac~~ la tangente aux trajectoires de R et S est perpendiculaire au rayon vecteur CR, CS, puisque C est le centre instantané de rotation : donc le travail des 2 forces dans le déplacement du disque est constamment nul.

Prenons pour axe Ox la base, qui fait l'angle α avec l'horizon. Soit E le point du disque qui a coïncidé avec O, θ l'angle CME dont le disque a tourné depuis sa position initiale. $r\theta = x = OC$

Telle est l'abscisse du centre M. — Appliquons le théorème des forces vives : la force vive de la masse totale concentrée au centre de gravité est :

$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ — Le mouvement relatif du disque est une rotation autour de son centre ; Mk^2 étant le moment d'inertie par rapport au centre, la force vive du disque dans cette rotation est : $Mk^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

Enfin le travail du poids $\underline{Mg}$ dans un déplacement infiniment petit $\underline{dx}$ est :

$$Mg \sin\alpha . dx$$

L'équation des forces vives est donc:

$$d\left[\frac{M}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{Mk^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = Mg\sin\alpha\, dx$$

Or: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dx}{dt}$ $\qquad \frac{1}{2}d\left[\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = g\sin\alpha\, dx$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{k^2}{r^2}}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{k^2}{r^2}}$$

L'accélération du centre est constante; le mouvement du centre est donc uniformément accéléré. La chute est plus lente que la chute libre pour 2 raisons; d'abord à cause de l'inclinaison de la base par rapport à la verticale; ensuite à cause de la rotation du disque, qui donne lieu au dénominateur $1+\frac{k^2}{r^2}$ où figure le moment d'inertie.

Le mouvement de rotation du disque autour de son centre se trouve en même temps déterminé.

Nous avons invoqué ci-dessus une propriété qu'il est aisé de démontrer:

<u>Lemme</u>. Quand un corps solide tourne autour d'un axe, sa force vive est égale à son moment d'inertie multiplié par le carré de sa vitesse angulaire –

En effet la vitesse absolue de chacun de ses points est

$v = \omega r$ $\qquad r$ étant la distance du point à l'axe

La force vive totale est: $\Sigma mv^2 = \Sigma m\omega^2 r^2 = \omega^2 \Sigma mr^2 = Mk^2\omega^2$ –

On peut déterminer la réaction CQ au moyen des équations du mouvement du centre de gravité: $M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha + N_x$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = Mg\cos\alpha + N_y$$

On en tire:

$$N_x = \frac{-k^2}{r^2+k^2}Mg\sin\alpha \qquad N_y = -Mg\cos\alpha$$

La réaction normale de la base : N_y, est la même qu'au repos, et égale à la composante normale du poids. — La réaction totale s'accroît donc, dans le roulement, de sa composante tangentielle N_x, qui est constante.

Lemme. Quand un corps solide tourne autour d'un axe fixe, le moment de sa quantité de mouvement par rapport à cet axe est égal à son moment d'inertie multiplié par sa vitesse angulaire.

Soit Oz l'axe de rotation, le moment de la quantité de mouvement est :

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma mr^2\frac{d\theta}{dt} = \Sigma mr^2\omega = Mk^2\omega$$

— Nous allons maintenant étudier le mouvement d'un corps solide mobile autour d'un axe fixe Oz. —

Ce corps constitue un système à liaisons complètes, indépendantes du temps ; sa position dépend d'un seul paramètre, l'angle de rotation θ. Le théorème des forces vives fournira l'unique équation du mouvement, débarrassée des liaisons (force vive $= Mk^2\omega^2$) :

$$d\frac{Mk^2\omega^2}{2} = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

Dans le 2e membre ne figurent que les forces directement appliquées. Il peut se simplifier, puisque le seul déplacement possible est une rotation, où l'on a pour chaque point du corps :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = C^{te}$$

$$dx = -y\,d\theta = -y\omega\,dt \qquad dy = x\,d\theta = x\omega\,dt \qquad dz = 0.$$

$$d\frac{Mk^2\omega^2}{2} = \omega\,dt\,\Sigma(xY - yX)$$

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = \Sigma(xY - yX)$$

Telle est l'équation du mouvement : elle est du 2e ordre en θ —

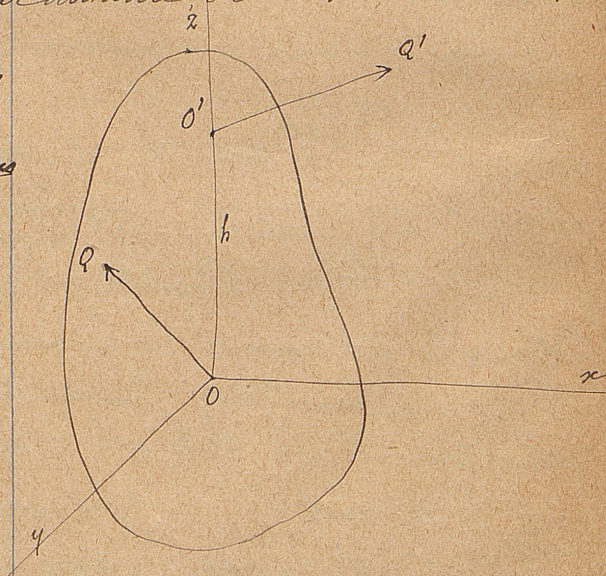
On peut l'obtenir aussi en appliquant le théorème des moments des quantités de mouvement — Les forces extérieures sont les forces directement appliquées et les réactions de l'axe; mais les moments de ces réactions sont nuls; on a donc par ce théorème:

$$\frac{d}{dt} Mk^2\omega = Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma(xY - yX)$$

En intégrant cette équation, on aura θ en fonction du temps et de 2 constantes arbitraires, qu'on déterminera par les conditions initiales.

On peut calculer les pressions du corps sur l'axe, ou les réactions (égales et opposées) de l'axe sur le corps.

Pour préciser la question, supposons que l'axe soit déterminé par 2 points fixes, O, O'; soit leur distance OO' = h sur Oz.



Soient $Q(A, B, C)$ la réaction du p. O, $Q'(A', B', C')$ celle du p. O'.

Appliquons le théorème des projections des quantités de mouvement sur les 3 axes; on doit faire figurer dans les seconds membres toutes les forces extérieures au corps:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = A + A' + \Sigma X$$

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = B + B' + \Sigma Y$$

$$\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = C + C' + \Sigma Z$$

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux 3 axes; les 3 moments de Q sont nuls, et le moment de Q' par rapport à Oz est nul; on a donc les 3 équations:

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY) - hB'$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ) + hA'$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(xY - yX)$$

Cette dernière équation, qui ne contient pas les réactions, est l'équation du mouvement trouvée plus haut. On a ainsi 6 équations du mouvement; nous verrons plus tard qu'il ne peut y en avoir plus de 6 pour un corps solide libre (or nous considérons le corps comme libre en lui appliquant les réactions Q et Q'.) La 4e et la 5e déterminent A', B'; puis la 1e et la 2e donnent A, B; de la 3e on ne peut tirer que $C+C'$, les 2 composantes restent indéterminées — Ce résultat, déjà trouvé en statique (1er cahier, page 112) tient à l'hypothèse d'un corps absolument rigide; en réalité, les pressions C et C' sont physiquement déterminées par les flexions du corps, qui mettent en jeu des forces d'élasticité.

Pour mettre en évidence la variable θ, exprimons les dérivées de x, y, z en fonction de $\frac{d\theta}{dt} = \omega$:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x \qquad \frac{dz}{dt} = 0.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Emportant ces expressions dans les 5 premières équations, elles deviennent,

$$-\omega^2\Sigma mx - \frac{d\omega}{dt}\Sigma my = A + A' + \Sigma X$$

$$-\omega^2\Sigma my + \frac{d\omega}{dt}\Sigma mx = B + B' + \Sigma Y$$

$$0 = C + C' + \Sigma Z$$

$$-\omega^2\Sigma myz + \frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz = \Sigma(yZ - zY) - hB'$$

$$-\omega^2\Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt}\Sigma myz = \Sigma(zX - xZ) + hA'$$

$$\left[Mk^2\frac{d\omega}{dt} = \Sigma(xY - yX)\right]$$

Les sommes : Σmx, Σmy, Σmxz, Σmyz qui figurent dans ces équations sont connues ; elles varient en général quand le corps tourne. Les 2 premières varient comme les coordonnées du centre de gravité, car :

$$\Sigma mx = M\xi \qquad \Sigma my = M\eta$$

On peut évaluer les 2 dernières en rapportant les points du corps à des axes mobiles liés au corps lui-même : soient $Ox'y'z'$:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad y = x'\sin\theta - y'\cos\theta \qquad z = z' \qquad \text{d'où :}$$

$$\Sigma mxz = \cos\theta\, \Sigma mx'z' - \sin\theta\, \Sigma my'z'$$

$$\Sigma myz = \sin\theta\, \Sigma mx'z' + \cos\theta\, \Sigma my'z'$$

$\Sigma mx'z'$, $\Sigma my'z'$ sont des constantes qu'on peut calculer. On voit que les 4 sommes considérées dépendent de θ ; on aura donc les pressions Q, Q' en fonction de l'angle de rotation —

Supposons que $\underline{Oz}$ soit un axe principal d'inertie du corps relatif au centre de gravité : on sait qu'il est alors axe principal pour tous ses points ; on a donc : $\Sigma mx = 0 \quad \Sigma my = 0 \quad \Sigma mxz = 0 \quad \Sigma myz = 0$

Ainsi, quelle que soit la valeur de θ ou de ω, les 1ers membres des équations s'annulent, et l'on a simplement :

$$0 = A + A' + \Sigma X \qquad 0 = B + B' + \Sigma Y$$

$$0 = -hB' + \Sigma(yZ - zY) \qquad 0 = hA' + \Sigma(zX - xZ)$$

On voit que les équations qui déterminent les pressions sont les mêmes qu'en statique (1er cah. p. 114.) — Les forces directement appliquées au corps peuvent être remplacées par leur résultante OR et un couple d'axe OG ; décomposons ce couple en OG' parallèle à Oz et OG'' perpendiculaire à Oz ; s'il n'y avait que R et G'', le corps serait en équilibre, et exercerait

sur les 2 points fixes O, O' certaines pressions déterminées par les équations précédentes - L'addition du couple OG a pour effet de faire tourner le corps autour de Oz, mais les pressions sont les mêmes qu'au repos -

- Supposons que les forces appliquées au corps aient une résultante unique passant par le point O. L'équation du mouvement devient :

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma(xY - yX)$$

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad \text{d'où :} \qquad \omega = \omega_0$$

Le corps tourne autour de Oz avec une vitesse constante.

Les termes en $\frac{d\omega}{dt}$ disparaissent des équations, puisque $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

Cherchons à quelles conditions le point O' ne supportera aucune pression - Il faut pour cela que : $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$.

Les 3 moments par rapport aux 3 axes étant nuls, on doit avoir :

$$\omega^2 \Sigma myz = 0 \qquad \omega^2 \Sigma mxz = 0$$

Donc, il faut et il suffit que : $\Sigma myz = 0$ $\Sigma mxz = 0$

c'à d. que Oz soit axe principal d'inertie relatif au point O.

On peut alors supprimer le point O' ; d'où ce théorème :

Si un corps solide a un point fixe O et si les forces appliquées à ce corps ont une résultante unique passant par O, ce corps, lancé avec une vitesse angulaire initiale autour d'un axe principal d'inertie relatif au point O continuera à tourner autour de cet axe fixe avec une vitesse angulaire constante -

- Supposons que les forces appliquées au corps soient équivalentes à une résultante OR et à un couple OG dirigé suivant Oz. On aura encore

$$\Sigma(yZ - zY) = 0 \qquad \Sigma(zX - xZ) = 0$$

mais : $\Sigma(xY - yX) \neq 0$ et par suite : $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$.

Cherchons à quelles conditions le point O ne supportera aucune pression. Pour que A', B' soient nulles, il faudra qu'on ait :

$$\omega^2 \Sigma myz - \frac{d\omega}{dt} \Sigma mxz = 0 \qquad -\omega^2 \Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt} \Sigma myz = 0$$

Le déterminant de ces 2 équations : $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4$ étant essentiellement positif, il faut que :

$$\Sigma mxz = 0 \qquad \Sigma myz = 0$$

On retrouve la même conclusion : Oz doit être axe principal d'inertie relatif au point O. D'où ce théorème :

Si un corps solide a un point fixe O, et si les forces appliquées à ce corps se réduisent à une résultante OR et à un couple OG dirigé suivant un des axes principaux d'inertie relatifs au point O, ce corps, lancé dans une rotation autour de cet axe continuera à tourner autour de ce même axe fixe, avec une vitesse angulaire variable.

Cette double propriété caractérise les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe qu'on appelle pour cette raison axes permanents de rotation.

Application : Pendule composé (étudié par Huyghens qui le premier a traité le problème du mouvement d'un système.)

Le pendule composé est un corps solide pesant, mobile autour d'un axe horizontal. Prenons pour plan de la figure le plan perpendiculaire à l'axe de suspension contenant le centre de gravité G. Ce point décrit dans ce plan un cercle ayant O pour centre et pour rayon $OG = l$. L'angle $GOx = \theta$ s'appelle angle d'écart. (Ox verticale)

L'équation du mouvement est :

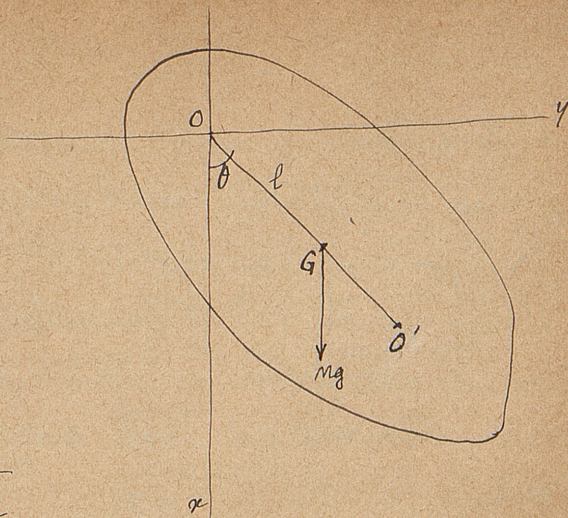
$$Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\sin\theta$$

ou : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gl}{K^2}\sin\theta$

d'où, en intégrant :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2gl}{K^2}\cos(\theta-\alpha)$$

C'est le même résultat que pour le pendule simple (v. page 27) dont l'équation est : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$



Pour identifier les 2 équations, il suffirait de faire : ~~$\begin{cases} l = l' \\ K^2 = l^2 \end{cases}$~~

c.à.d. de poser : $l' = \frac{K^2}{l}$

Le mouvement du pendule composé est donc identique (les conditions initiales étant supposées les mêmes) à celui d'un pendule simple de longueur l', qu'on appelle le pendule simple synchrone du pendule proposé ~~(leurs masses étant égales)~~

Portons sur OG la longueur $OO' = l'$. Le point O' oscille dans le mouvement du corps solide comme un point matériel ~~libre~~ ~~suspendu~~ c.à.d. comme un pendule simple ; il en est de même de ~~ceux~~ O tous les points de la droite menée par O' parallèlement à l'axe de suspension ; on l'appelle axe d'oscillation.

La longueur OO' est toujours plus grande que OG, en vertu du théorème des moments d'inertie. Soit en effet $M\rho^2$ le moment d'inertie du corps par rapport à un axe passant par G et parallèle à l'axe d'oscillation ; on a : $Mk^2 = M\rho^2 + Ml^2$

$$K^2 = \rho^2 + l^2 \qquad l' = \frac{\rho^2 + l^2}{l} = l + \frac{\rho^2}{l} \qquad O'G = \frac{\rho^2}{l}$$

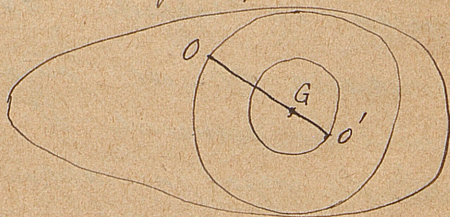
ρ étant une quantité constante, on voit que l'axe de suspension et l'axe d'oscillation sont réciproques: $OG . O'G = \rho^2$.

La formule précédente: $l' = l + \frac{\rho^2}{l}$ permet d'étudier la variation du mouvement oscillatoire quand l'axe de suspension se déplace dans le corps parallèlement à une même direction — ρ reste constante — Le minimum de l' a lieu pour: $l = \rho$ c'est: $l' = 2\rho$.

Le lieu des axes correspondant à ce minimum est un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe passant par G et parallèle à la direction donnée, et pour rayon le rayon de giration ρ du corps par rapport à cet axe. — A la longueur minima du pendule simple synchrone correspond le minimum de la durée d'une oscillation —

Si l'on se donne à l'avance la durée de l'oscillation, ou qu'on assigne à la longueur du pendule simple synchrone une valeur $l' > 2\rho$, on trouve pour l 2 solutions distinctes. Le lieu des axes de suspension parallèles à la direction donnée pour lesquels le pendule simple synchrone a une longueur donnée se compose de 2 cylindres de révolution ayant pour centre G —

Le produit de leurs rayons est égal à ρ^2 — Les axes de suspension et d'oscillation correspondants sont diamétralement opposés sur les 2 cylindres.

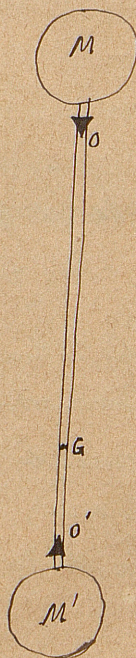


Théorème. Si l'on a dans un plan passant par le centre de gravité, et à des distances inégales de part et d'autre de ce point, 2 axes parallèles de suspension pour lesquels la longueur du pendule simple synchrone soit la même, cette longueur est égale à leur distance.
Soient l_1, l_2 les distances de ces 2 axes au centre de gravité : l' la longueur inconnue du pendule simple synchrone ; on a :

$$l' = l_1 + \frac{\rho^2}{l_1} \qquad l' = l_2 + \frac{\rho^2}{l_2} \qquad l_1 + \frac{\rho^2}{l_1} = l_2 + \frac{\rho^2}{l_2}$$

Cette équation admet 2 solutions : la 1re $l_1 = l_2$ est exclue par l'hypothèse ; reste la 2e : $l_1 = \frac{\rho^2}{l_2}$ qui exprime que les 2 axes sont réciproques.
Comme ils sont de part et d'autre du centre de gravité, ils se trouvent diamétralement opposés, et l'on a : $l' = l_1 + l_2$.

Le pendule réversible de Kater est une application de ce théorème : il se compose de 2 masses inégales mais de même forme (pour égaliser la résistance de l'air) reliées par une tige rigide qui porte 2 couteaux opposés par leurs arêtes et dont la distance est connue par construction. Le centre de gravité se trouve à des distances inégales des 2 axes de suspension. Des curseurs permettent de rendre égales les durées des oscillations autour de ces 2 axes. Ils sont alors réciproques, et leur distance



est la longueur du pendule simple synchrone. On connaît cette longueur l, on mesure expérimentalement la durée t d'une oscillation, et la formule :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

permet de calculer g.

Problème. Etant donné un corps solide, calculer la longueur du pendule simple synchrone correspondant à un axe de suspension donné.

Prenons pour axes coordonnés les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité : soient : $A = Ma^2 \quad B = Mb^2 \quad C = Mc^2$ les 3 moments principaux d'inertie du corps. On définira la position de l'axe de suspension donné par sa distance l au centre de gravité, et ses cosinus directeurs α, β, γ. Soit $M\rho^2$ le moment d'inertie du corps par rapport à un axe parallèle au précédent et passant par G. L'équation de l'ellipsoïde d'inertie est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

et l'on a :

$$M\rho^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

ou :

$$\rho^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

On calculera la longueur du pendule simple synchrone par la formule :

$$l' = l + \frac{\rho^2}{l} = l + \frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}{l}$$

Si l'on cherche le lieu des axes pour lesquels la longueur du pendule simple synchrone est la même, on trouve un complexe du 4e ordre.

Le lieu de ceux de ces axes qui sont parallèles à une même direction est, nous l'avons vu, l'ensemble de 2 cylindres du 2e degré, de centre G.

Le lieu de ceux de ces axes qui passent par un même point donné

est un cône du 4e degré.

— Mouvement d'une chaîne homogène pesante sur une courbe fixe.
Soit AB la chaîne, de longueur $2l$; soit ρ la masse de l'unité de longueur. la masse totale est: $M = 2l\rho$

Menons 3 axes rectangulaires $Oxyz$, Oz vertical vers le haut. La courbe fixe est déterminée par ses 3 coordonnées définies en fonction de son arc s. La chaîne forme un système à liaisons complètes; sa position dépend d'un seul paramètre, la distance curviligne d'un de ses points, par exemple de son milieu C à un point fixe de la courbe, O':



posons: $O'C = \sigma$

d'où: $O'A = \sigma - l$ $\quad O'B = \sigma + l$

Les forces de liaison sont les actions mutuelles des éléments de la chaîne (forces intérieures) et les réactions normales (pas de frottement) de la courbe sur la chaîne (f. extérieures). Appliquons le théorème des forces vives, pour n'avoir pas à tenir compte des liaisons. Le point C a pour vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$; ce sera aussi la vitesse de tous les points de la chaîne. Un élément de masse m aura pour force vive $m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$; La force vive totale sera: $\Sigma m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2l\rho\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$

Pour calculer la somme des travaux des forces extérieures c. à d. du poids, décomposons la chaîne en éléments infiniment petits de longueur égale $d\sigma$; soient $z_1, z_2 \ldots\ldots z_{n-1}$, les cotes des points de division, z_0 et z' celles des extrémités A et B. L'élément $(z_0 z_1)$

a pour masse $\rho d\sigma$, pour poids $g\rho d\sigma$; ce poids peut être appliqué en un point quelconque de l'élément, par exemple au point z_0. De même le poids de l'élément suivant est $g\rho d\sigma$ appliqué en z_1, et ainsi de suite; le poids du dernier élément (z_{n-1}, z') est toujours $g\rho d\sigma$ appliqué en z_{n-1}. — Quand la chaîne éprouve le déplacement infiniment petit $d\sigma$, le point z_0 ~~devient~~ vient en z_1, z_1 en z_2, ... z_{n-1} en z': les travaux élémentaires des forces extérieures ~~sont~~ donc:

$$g\rho d\sigma(z_0 - z_1),\ g\rho d\sigma(z_1 - z_2), \ldots\ldots\ldots g\rho d\sigma(z_{n-1} - z')$$

Leur somme est:

$$g\rho d\sigma(z_0 - z')$$

D'où cette conclusion intéressante:

La somme des travaux élémentaires du poids de la chaîne dans un déplacement total $\underline{d\sigma}$ est égale au travail élémentaire du poids d'un élément linéaire $\underline{d\sigma}$ qu'on déplacerait d'un bout à l'autre de la chaîne — Ce résultat est d'ailleurs évident; faire glisser toute la chaîne de sa position AB à sa position $A'B'$ équivaut à transporter le segment AA' en BB'.

L'équation des forces vives est donc:

$$d\left[l\rho\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] = g\rho\, d\sigma(z_0 - z')$$

On a par hypothèse: $z = \varphi(s)$ s étant l'arc compté à partir de O' sur la courbe; donc: $z_0 = \varphi(\sigma - l)$ $z' = \varphi(\sigma + l)$

$$d\left[l\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] = g\,d\sigma\left[\varphi(\sigma - l) - \varphi(\sigma + l)\right]$$

ou

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{g}{2l}\left[\varphi(\sigma - l) - \varphi(\sigma + l)\right]$$

Telle est l'équation du mouvement du point C sur la courbe. C'est l'équation d'un mouvement rectiligne (qu'on obtiendrait en rectifiant la cbe.)

Etudions le cas le plus simple, où : $z = ks$
celui où la courbe donnée est une hélice, les arcs étant comptés à partir du plan horizontal des xy (cas particulier : une droite)

$z_0 - z' = k(\sigma - l) - k(\sigma + l) = -2kl$ L'équation devient :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{g}{2l}(-2kl) = -kg$$

Le mouvement est uniformément accéléré comme dans une chute libre, avec cette différence que la pesanteur est multipliée par le facteur $k < 1$: la chute est donc retardée. De plus le mouvement est indépendant de la longueur de la chaîne.

Cela est encore vrai pour le cas : $z = \frac{s^2}{8R}$
où la courbe est une cycloïde, ou le résultat de l'enroulement d'une cycloïde sur un cylindre de génératrice verticale, rapportée à son point le plus bas comme origine des arcs.

$$z_0 - z' = \frac{(\sigma - l)^2}{8R} - \frac{(\sigma + l)^2}{8R} = \frac{-4l\sigma}{8R} = -\frac{l\sigma}{2R}$$

L'équation devient : $$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{g}{2l}\left(-\frac{l\sigma}{2R}\right) = -\frac{g\sigma}{4R}$$

Elle est encore indépendante de la longueur.

Le point C se meut donc comme un point matériel isolé glissant sans frottement sur la cycloïde ; son mouvement est donc celui d'un pendule cycloïdal, il est tautochrone et brachistochrone (Puiseux).

On peut démontrer que les 2 cas précédents sont les seuls où le mouvement soit indépendant de l. En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait : $$\frac{\varphi(\sigma - l) - \varphi(\sigma + l)}{l} = \psi(\sigma)$$

ψ étant indépendante de l, on: $\varphi(\sigma-l)-\varphi(\sigma+l)=l\psi(\sigma)$ quelle que soit l. Prenons les dérivées secondes par rapport à l: on doit avoir identiquement: $\varphi''(\sigma-l)-\varphi''(\sigma+l)=0$

Or σ et l étant des variables indépendantes, $(\sigma-l)$ et $(\sigma+l)$ peuvent prendre toutes les valeurs possibles; il faut donc qu'on ait: $\varphi''(x)=\varphi''(y)$ quels que soient x et y,

c à d. $\varphi''=C^{te}$

Distinguons 2 cas:

Si $C^{te}=0$, $\varphi''(x)=0$ $\varphi'(x)=k$ $\varphi(x)=kx+C$

C'est l'équation d'une droite: $z=kx+C$

ou d'une hélice enroulée sur un cylindre vertical: $z=ks+C$

Si $C^{te}\gtrless 0$, $\varphi''(x)=C$ $\varphi'(x)=C(x-x_0)$ $\varphi(x)=\frac{C}{2}(x-x_0)^2+C'$

C'est l'équation d'une cycloïde: $z-z_0=\frac{C}{2}(x-x_0)^2$

ou, par un changement d'axes convenable: $z=\frac{C}{2}x^2$

C'est aussi une courbe quelconque obtenue en enroulant cette cycloïde sur un cylindre vertical: $z=\frac{C}{2}s^2$.

On retrouve les 2 cas étudiés ci-dessus, et ceux-là seulement —

— Dans le cas d'une circonférence située dans un plan vertical, on retrouve l'équation du pendule simple à un facteur près:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=-\frac{g}{l}R\cos\frac{\sigma}{R}\sin\frac{l}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta\sin\alpha$$

en posant: $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\sigma}{R}$ $\alpha=\frac{l}{R}$ θ angle d'écart.

La longueur du pendule simple synchrone est: $l'=\frac{l}{\sin\alpha}$.

On arriverait au même résultat en considérant la chaîne comme un pendule composé; en effet, comme elle garde une forme invariable,

on peut la solidifier et la supposer invariablement liée au p. O centre de la circonférence. Son rayon de giration : $K = R$; la distance OG de son centre de gravité à l'axe de suspension est : $\frac{R}{l} \sin \frac{l}{R}$ (par la formule : $l\xi = \int x ds$)

La longueur du pendule simple synchrone est donc :

$$l' = \frac{Rl}{\sin \frac{l}{R}}$$

Dans le cas particulier où la chaîne aurait la même longueur que la circonférence, son mouvement serait évidemment uniforme.

— Calcul de la tension — Considérons ~~un~~ point M de la chaîne et soit λ l'arc CM. La partie AM de la chaîne se meut comme si, la partie MB étant supprimée, la tension T était appliquée tangentiellement en M.



Soit z la cote du point M : $z = \varphi(\sigma + \lambda)$

Le théorème des forces vives donne alors :

$$d\left[\frac{l+\lambda}{2}\rho\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] = T d\sigma + g\rho\, d\sigma\left[\varphi(\sigma - l) - \varphi(\sigma+\lambda)\right]$$

ou : $(l+\lambda)\rho\frac{d^2\sigma}{dt^2} = T + g\rho\left[\varphi(\sigma-l) - \varphi(\sigma+\lambda)\right]$

On remplacera $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ par la valeur trouvée plus haut, et l'on aura T en fonction de σ et de λ. Comme vérification, en faisant $\lambda = \pm l$, on devra trouver : $T = 0$.

Dans le cas où la courbe est une hélice, la tension est nulle dans

toute la chaîne ; chaque élément se meut donc comme un point matériel libre.

Si l'on a une chaîne matérielle proprement dite, n'offrant pas de résistance au tassement des chaînons, la valeur de la tension devra être positive ou nulle — Si on a une chaîne articulée composée d'éléments rigides, la tension pourra être négative.

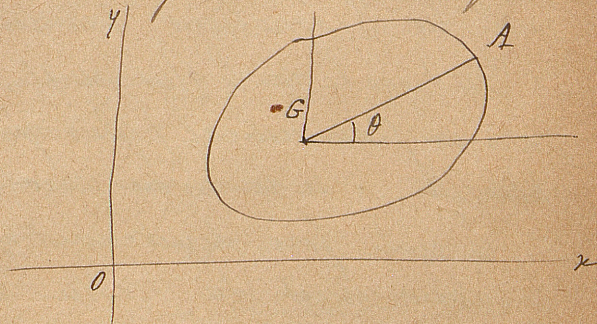
— Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Nous étudierons d'abord le cas limite où le point fixe serait à l'infini, c.à.d. le mouvement d'un corps solide assujetti à se déplacer parallèlement à un plan fixe.

Toutes les sections parallèles au plan fixe pratiquées dans le corps se déplacent dans leur plan ; ~~en particulier~~, le mouvement pourra être représenté par le mouvement d'une figure invariable dans un plan parallèle au plan fixe, le corps étant invariablement lié à cette figure ; on pourra prendre en particulier pour cette figure la section parallèle menée par le centre de gravité, et son plan pour plan des xy. Le problème est ramené au mouvement d'une figure plane dans son plan — Par exemple, le mouvement d'un cylindre se déplaçant perpendiculairement à ses génératrices sera représenté par le mouvement de sa section droite dans un plan fixe.

La position de la figure plane dans un plan invariable dépend de 3 paramètres : les coordonnées ξ, η du centre de gravité G, et l'angle θ que fait une droite GA invariable dans la figure avec l'axe Ox et qui détermine son orientation —

Le corps est sollicité par des forces données dans l'espace ;

mais leurs composantes perpendiculaires au plan fixe sont annulées par la réaction du plan, de sorte qu'il n'y a à tenir compte que des composantes parallèles au plan; elles se projettent d'ailleurs en vraie grandeur, de sorte qu'on peut les y supposer situées. Le théorème du mouvement du centre de gravité donne l'équation:



$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Sigma X \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Sigma Y$$

Les moments des forces par rapport à Oz (perpendiculaire au plan de la figure) sont les moments des projections des forces par rapport au point O du plan qui les contient.

Le théorème des moments des quantités de mouvement donne:

$$\frac{d}{dt}\left[M\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)+Mk^2\frac{d\theta}{dt}\right]=\Sigma(xY-yX)$$

Ces 3 équations définissent ξ, η, θ en fonction du temps.

On peut remplacer la dernière par une équation plus simple en appliquant le même théorème au mouvement relatif de la figure par rapport à des axes parallèles aux axes fixes menés par G: on obtient l'équation:

$$Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=\Sigma(x'Y-y'X)$$

où l'on a: $x'=x-\xi \qquad y'=y-\eta.$

On peut encore remplacer une des 3 équations par l'équation des forces vives, qui en est une conséquence. En la prenant d'abord par rapport aux axes fixes, on trouve:

$$d\left[\frac{M}{2}\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right\}+\frac{Mk^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=\Sigma(Xdx+Ydy)$$

En le prenant par rapport aux axes mobiles, c.à.d. en appliquant le théorème des forces vives au mouvement autour du centre de gravité, on trouve :
$$d\left[\frac{Mk^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = \Sigma\left(X dx' + Y dy'\right)$$
S'il y a d'autres liaisons, on devra éliminer les forces de liaison entre les 3 équations distinctes qu'on aura choisies.

Étudions le cas le plus simple, celui d'une plaque pesante lancée dans un plan vertical (plus généralement, celui d'un corps pesant assujetti à se mouvoir parallèlement à un plan vertical.)

La seule force directement appliquée étant le poids, on a pour le mouvement du centre de gravité les équations :
$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -g$$
mouvement d'un point matériel pesant libre : le centre de gravité décrit une parabole d'axe vertical. Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué au mouvement relatif autour du centre de gravité donne : $Mk^2\frac{d\theta}{dt^2} = 0$

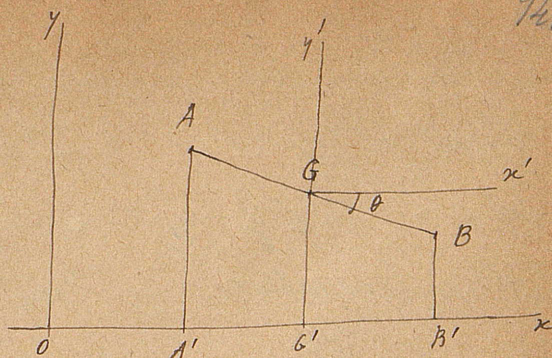
ou $\frac{d\theta}{dt} = C^{te}$

Le corps tourne autour de son centre de gravité avec une vitesse angulaire constante, égale à la vitesse angulaire initiale.

Si on le lance sans vitesse angulaire initiale, son mouvement sera une translation parabolique.

<u>Problème</u>. Trouver le mouvement dans le plan des xy, de 2 points A et B de même masse, liés par une tige sans masse et attirés par l'axe Ox proportionnellement à la distance.

Les forces extérieures sont : $Y = -m\mu y \qquad Y_1 = -m\mu y_1$



Les coordonnées du centre de gravité G sont :

$$\xi = \frac{x+x_1}{2} \qquad \eta = \frac{y+y_1}{2}$$

Les équations du mouvement du centre de gravité sont :

$$2m\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \qquad 2m\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + Y_1 = -m\mu(y+y_1) = -2m\mu\eta.$$

ou simplement : $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\mu\eta.$

en intégrant : $\frac{d\xi}{dt} = C^{te} \qquad \xi = at$

on annule la constante d'intégration en choisissant pour Oy l'ordonnée de G à l'instant initial : $\xi = 0$ pour $t = 0$.

Ainsi G' se meut sur Ox d'un mouvement uniforme.

Intégrons la 2e équation : $\frac{d^2\eta}{dt^2} + \mu\eta = 0$

$$\eta = A\cos t\sqrt{\mu} + B\sin t\sqrt{\mu} = A\sin(t\sqrt{\mu} + \alpha)$$

Pour avoir la trajectoire de G, éliminons t entre les 2 équations :

$$\eta = A\sin\left(\frac{\xi\sqrt{\mu}}{a} + \alpha\right)$$

C'est une sinusoïde.

Pour connaître le mouvement du système autour de son centre de gravité, appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement aux axes mobiles $Gx'y'$ parallèles aux axes fixes.

Posons : $B\hat{G}x' = \theta \qquad AB = 2l.$

Le moment d'inertie du système par rapport à G est $2ml^2$.

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à G est donc : $2ml^2.\frac{d\theta}{dt}$; sa dérivée : $2ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

D'autre part, la somme des moments des forces extérieures par rapport à G est : $\Sigma(x'Y - y'X) = x'Y + x'_1 Y_1$

c.à.d. : $m\mu(y - y_1)x' = -\ m\mu . 2l \sin\theta . l\cos\theta = -2m\mu l^2 \sin\theta\cos\theta$

D'où l'équation : $2ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -2m\mu l^2 \sin\theta\cos\theta$

ou : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu \sin\theta\cos\theta = -\frac{\mu}{2}\sin 2\theta$

Posons : $\theta' = 2\theta$ $\qquad \frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\mu \sin\theta'$

équation semblable à celle du pendule simple. On achèvera l'intégration au moyen des fonctions elliptiques. On trouverait ~~une intégrale première~~ ~~la même~~ équation en appliquant le théorème des forces vives.

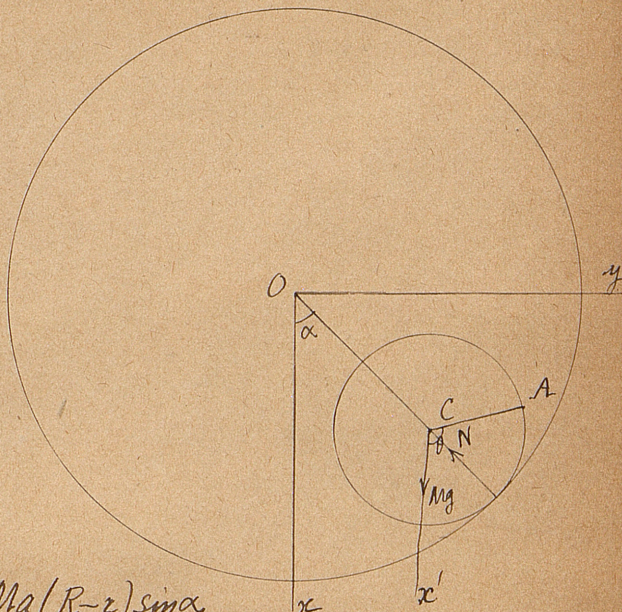
Ainsi le mouvement relatif du système autour de son centre est un mouvement pendulaire, de rotation ou d'oscillation —

On trouverait aisément la formule des oscillations infiniment petites, qui sont isochrones — Si l'on abandonne la barre sans vitesse angulaire initiale avec θ infiniment petit, elle exécutera des oscillations infiniment petites autour de Gx'. La position : $\theta = 0$ est donc une position d'équilibre relatif. Le mouvement se réduit alors à une translation, la barre étant constamment parallèle à Ox.

— Problème. Supposons que dans une circonférence fixe située dans un plan vertical, on place un disque homogène pesant assujetti à rester en contact sans frottement avec la circonférence : on demande son mouvement —

Prenons pour axes issus du centre de la circonférence fixe Oy horizontal, Ox vertical dirigé en bas. Soit C le centre du disque : on a constamment : $OC = R - r$.

La position du disque dépend de 2 paramètres : l'angle $C\hat{O}x = \alpha$, et l'angle de CA, rayon fixe du disque, avec Ox ou Cx' parallèle à Ox ; $ACx' = \theta$.



Les forces extérieures au disque sont : son poids Mg appliqué en C, et la réaction normale N de la circonférence fixe, appliquée au point de contact et passant par C. Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à O : le moment de N est nul, donc :

$$\frac{d}{dt}\left[M(R-r)^2\frac{d\alpha}{dt} + Mk^2\frac{d\theta}{dt}\right] = -Mg(R-r)\sin\alpha$$

Appliquons le même théorème par rapport à C ; les moments des 2 forces sont nuls, et on a l'équation plus simple :

$$\frac{d}{dt}\left(Mk^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{d\theta}{dt} = C^{te}$$

La vitesse angulaire du disque autour de son centre est donc égale à la vitesse angulaire initiale. Si on l'abandonne sans lui imprimer de vitesse angulaire, il glissera parallèlement à lui-même, et son mouvement sera une translation.

La 1e équation se simplifie, eu égard à la 2e ;

$$\frac{d}{dt}\left[M(R-r)^2\frac{d\alpha}{dt}\right] = -Mg(R-r)\sin\alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{R-r}\sin\alpha$$

équation du pendule simple de longueur : $l = R - r = OC$

Le centre C du disque oscille donc autour de O comme un pendule

